

## Экзаменационный билет №6

1. (6 баллов) Найти ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. (6 баллов) Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}.$$

3. (7 баллов) Найти образ, ядро, ранг и дефект линейного оператора  $\hat{A}: L \rightarrow L$ , где  $L = \{p(t) = at^2 + bt + c: a, b, c \in R\}$ ,  $\hat{A}p(t) = p'(t)$ .

4. (8 баллов) Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора  $\hat{A}: L \rightarrow L$ , где  $L = \{f(x) = a + b \sin x: a, b \in R\}$ ,  $\hat{A}f(x) = f(x) - 3f''(x)$ .

5. (7 баллов) Исследовать квадратичную форму  $\Phi(\vec{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$  на знакоопределенность.

6. (8 баллов) В двумерном евклидовом пространстве матрица Грама и векторы  $\vec{x}, \vec{y}$  в базисе  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  соответственно равны  $G = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ ,

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Найти длины векторов  $\vec{x}, \vec{y}$  и угол между ними.

7. (8 баллов) Ортогональным преобразованием переменных приведите квадратичную форму  $\Phi(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$  к каноническому виду.