Пустовенов К.М. ИНБО-11-20

Лабораторная работа 1.15 Изучение физического маятника и определение ускорения свободного падения.

Теоретическое введение.

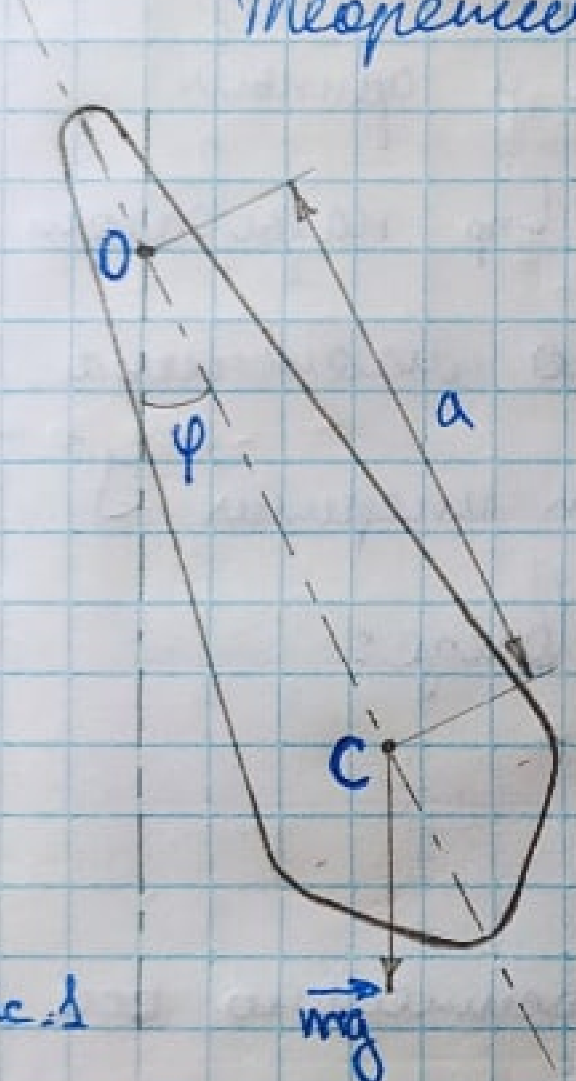


Рис. 1

На рис. 1 схематически изображён физический маятник, совершающий малые колебания в гравитационном поле Земли относительно оси, проходящей через точку подвеса O (эта ось перпендикулярна плоскости рисунка). Как известно, период колебаний физического маятника $T_ф$ определяется по формуле: $T_ф = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{mga}}$ (1), где J – момент инерции маятника относительно оси подвеса; m – масса маятника; a – расстояние между осью вращения O и центром масс C маятника; g – ускорение свободного падения.

Сравнивая этот период с периодом малых колебаний математического маятника:

$$T_м = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

можно заключить, что математический маятник с длиной: $l = l_{пр} = \frac{J}{ma}$ (2) будет иметь такой же период колебаний, как и данный физический маятник. Величину $l_{пр}$ называют приведённой длиной физического маятника.

По теореме Штейнера момент инерции J может быть представлен в виде:

$$J = J_0 + ma^2, \quad (3)$$

где J_0 – момент инерции относительно оси, параллельной оси подвеса и проходящей через центр масс физического маятника. С учетом (3) для $l_{пр}$ получим: $l_{пр} = \frac{J_0}{ma} + a$ (4)

Из (1) и (3) следует, что период колебаний физического маятника $T_ф$ зависит от a, причем при некотором значении $a = a_{мин}$ он имеет минимальное значение. Исследование функции $T_\phi(a)$ на минимум даёт:

$$a_{мин} = \sqrt{\frac{J_0}{m}} \quad (5)$$

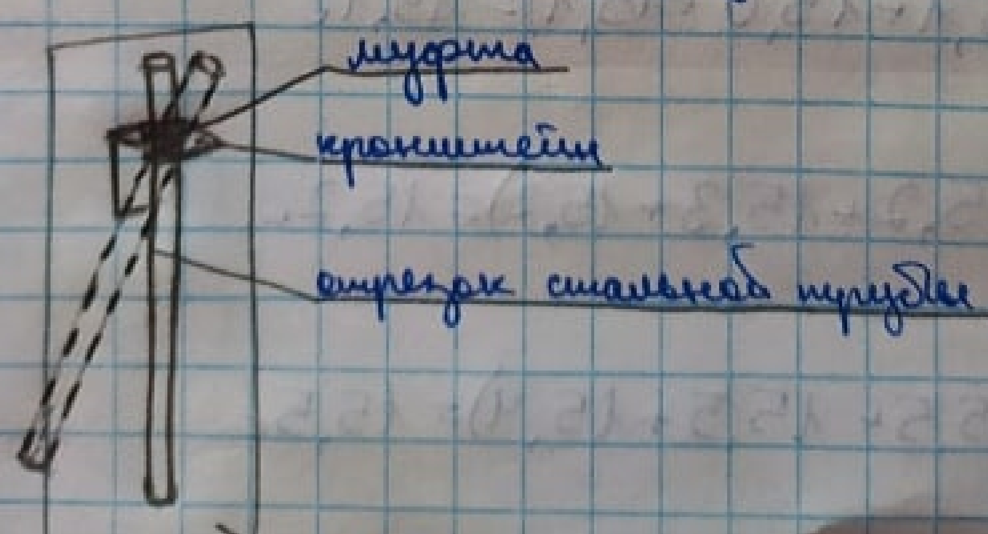
Решая квадратное уравнение (4) относительно a, получим:

$$a_{1,2} = \frac{L_{пр}}{2} \pm \sqrt{\frac{L_{пр}^2}{4} - \frac{J_0}{m}}, \quad (6)$$

т.е. одна и та же приведенная длина $L_{пр}$ и, следовательно, один и тот же период колебаний $T_\phi(1)$ могут быть получены при двух разных положениях оси подвеса. При этом:

$$a_1 + a_2 = L_{пр}, \quad a_1 \cdot a_2 = \frac{J_0}{m} \quad (7)$$

Принципиальная схема установки



№	a, см	N	t_1, с	t_2, с	t_3, с	$t_{ср}$, с	$T_ф$, с
1	15	10	16,3	16,4	16,3	16,3	1,63
2	20	10	15,4	15,3	15,4	15,4	1,54
3	25	10	14,9	15,0	15,0	15,0	1,5
4	30	10	15,1	15,0	15,1	15,1	1,51
5	35	10	15,2	15,3	15,2	15,2	1,52
6	40	10	15,5	15,5	15,4	15,5	1,55
7	45	10	15,8	15,7	15,7	15,7	1,57

Кузнецов Д.И.
20.10.2020

$$x_{ср} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$t_{1ср} = \frac{1}{3}(16,3 + 16,4 + 16,3) = 16,3 с$$

$$t_{2ср} = \frac{1}{3}(15,4 + 15,3 + 15,4) = 15,4 с$$

$$t_{3ср} = \frac{1}{3}(14,9 + 15,0 + 15,0) = 15,0 с$$

$$t_{4ср} = \frac{1}{3}(15,1 + 15,0 + 15,1) = 15,1 с$$

$$t_{5ср} = \frac{1}{3}(15,2 + 15,3 + 15,2) = 15,2 с$$

$$t_{6ср} = \frac{1}{3}(15,5 + 15,5 + 15,4) = 15,5 с$$

$$t_{7ср} = \frac{1}{3}(15,8 + 15,7 + 15,7) = 15,7 с$$

$$\Delta t_{сл} = \alpha_{n,p} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta t_i)^2}{n(n-1)}} \quad ; n=3,\ p=0{,}7 \Rightarrow \alpha_{n,p} = 1{,}4$$

$$\Delta x_i = |x_{ср} - x_i|$$

$$\Delta t_{11} = |t_{1ср} - t_{11}| = |16{,}3 - 16{,}3| = 0\,с$$

$$\Delta t_{12} = |t_{1ср} - t_{12}| = |16{,}3 - 16{,}4| = 0{,}1\,с$$

$$\Delta t_{13} = |t_{1ср} - t_{13}| = |16{,}3 - 16{,}3| = 0\,с$$

$$\Delta t_{сл} = 1{,}4 \cdot \sqrt{\frac{0^2 + 0{,}1^2 + 0^2}{3(3-1)}} = 0{,}0572\,с$$

$$\Delta T = \frac{\Delta t}{N}$$

$$\Delta T = \frac{0{,}0572}{10} = 0{,}00572\,с$$

$$T_{ф} = \frac{t_{ср}}{N}$$

$$T_{ф1} = \frac{16{,}3}{10} = 1{,}63\,с$$

$$T_{ф2} = \frac{15{,}4}{10} = 1{,}54\,с$$

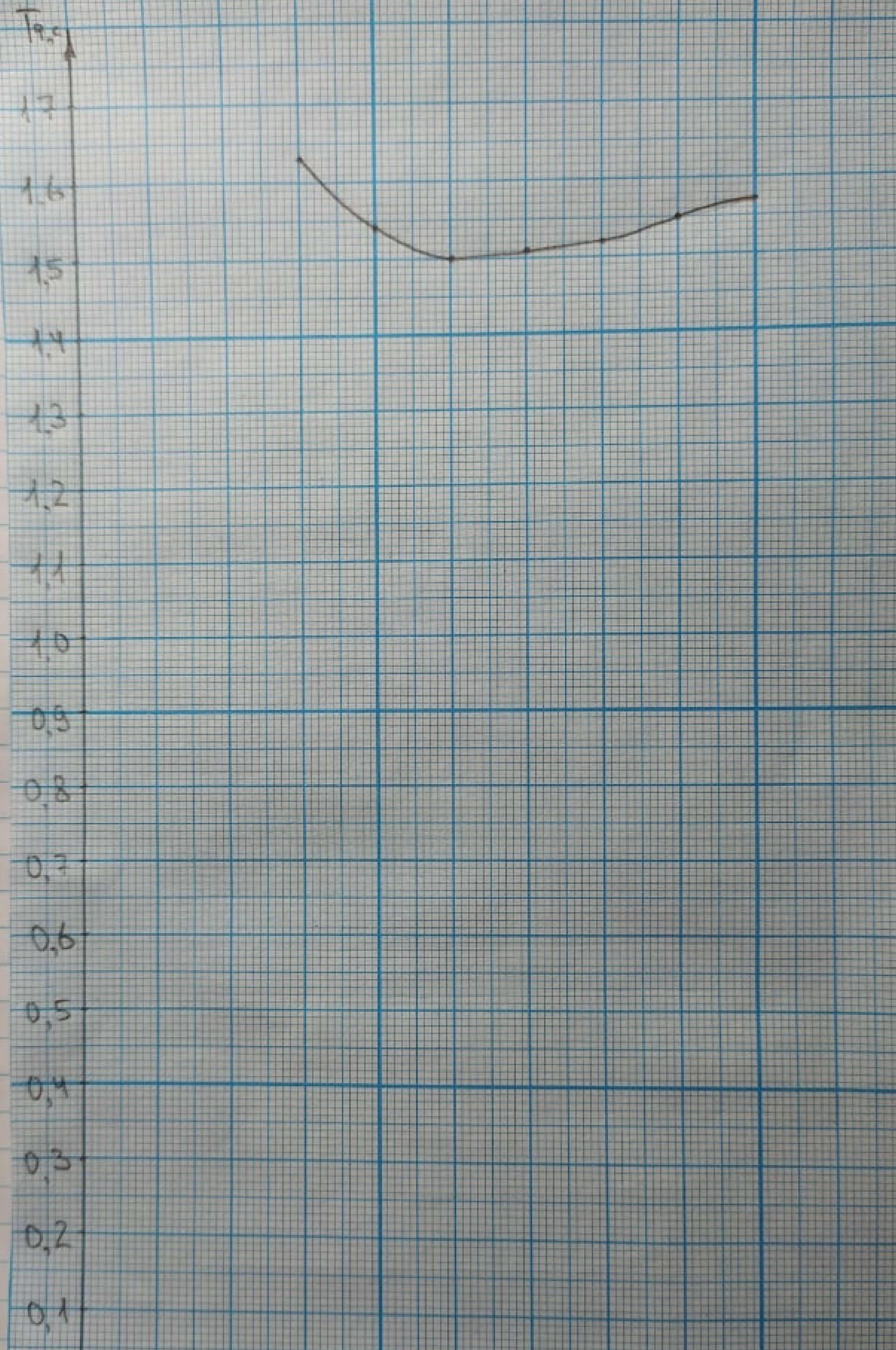
$$T_{ф3} = \frac{15{,}0}{10} = 1{,}5\,с$$

$$T_{ф4} = \frac{15{,}1}{10} = 1{,}51\,с$$

$$T_{ф5} = \frac{15{,}2}{10} = 1{,}52\,с$$

$$T_{ф6} = \frac{15{,}5}{10} = 1{,}55\,с$$

$$T_{ф7} = \frac{15{,}7}{10} = 1{,}57\,с$$



T, с
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
a, см

По графику:

$T_{\phi\,min} = 1{,}5\,c$

$a_{min} = 25\,см = 0{,}25\,м$

Теоретически:

$a_{min} = \sqrt{\frac{J_0}{m}}$

$J_0 = \frac{1}{12} mL^2$, $L = 1\,м$

$a_{min} = \sqrt{\frac{mL^2}{12m}} = \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0{,}29\,м$

$a_{min\,гр.} < a_{min\,теор.}$

1) $T_\phi = 1{,}55\,c$ | $g = 4\pi^2 T_\phi^{-2}(a_1 + a_2)$

$a_1 = 19\,см = 0{,}19\,м$ | $g = 4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1{,}55^{-2}(0{,}19 + 0{,}4) =$

$a_2 = 40\,см = 0{,}4\,м$ | $= 9{,}69\,\frac{м}{c^2}$

2) $T_\phi = 1{,}52\,c$ | $g = 4\pi^2 T_\phi^{-2}(a_1 + a_2)$

$a_1 = 22\,см = 0{,}22\,м$ | $g = 4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1{,}52^{-2}(0{,}22 + 0{,}35) =$

$a_2 = 35\,см = 0{,}35\,м$ | $= 9{,}73\,\frac{м}{c^2}$

3) $T_\phi = 1{,}51\,c$ | $g = 4\pi^2 T_\phi^{-2}(a_1 + a_2)$

$a_1 = 23\,см = 0{,}23\,м$ | $g = 4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1{,}51^{-2}(0{,}23 + 0{,}3) =$

$a_2 = 30\,см = 0{,}3\,м$ | $= 9{,}17\,\frac{м}{c^2}$

4) $T_\phi = 1{,}57\,c$ | $g = 4\pi^2 T_\phi^{-2}(a_1 + a_2)$

$a_1 = 18\,см = 0{,}18\,м$ | $g = 4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1{,}57^{-2} \cdot (0{,}18 + 0{,}45) =$

$a_2 = 45\,см = 0{,}45\,м$ | $= 10{,}08\,\frac{м}{c^2}$

$$g_{ср} = \frac{1}{4}(9,69 + 9,73 + 9,17 + 10,08) = 9,67 \frac{м}{с^2}$$

$$\Delta g = g\left(2\frac{\Delta T_ф}{T_ф} + \frac{2\Delta a}{a_1 + a_2}\right)$$

$$T_{ф\,ср} = \frac{1}{7}(1,63 + 1,54 + 1,5 + 1,51 + 1,52 + 1,55 + 1,57) = 1,55\,с$$

$$\Delta T_{ф1} = |1,55 - 1,63| = 0,08\,с$$

$$\Delta T_{ф2} = |1,55 - 1,54| = 0,01\,с$$

$$\Delta T_{ф3} = |1,55 - 1,5| = 0,05\,с$$

$$\Delta T_{ф4} = |1,55 - 1,51| = 0,04\,с$$

$$\Delta T_{ф5} = |1,55 - 1,52| = 0,03\,с$$

$$\Delta T_{ф6} = |1,55 - 1,55| = 0\,с$$

$$\Delta T_{ф7} = |1,55 - 1,57| = 0,02\,с$$

$$\Delta T_{ф\,кв} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta T_{фi})^2}{n(n-1)}}$$

$$\Delta T_{ф\,кв} = \sqrt{\frac{0,08^2 + 0,01^2 + 0,05^2 + 0,04^2 + 0,03^2 + 0^2 + 0,02^2}{7(7-1)}} = 0,0003\,с$$

$$\Delta T_ф = \alpha_{n,p} \cdot \Delta T_{ф\,кв}\ ; \quad n = 7\ ,\ p = 0,7 \Rightarrow \alpha_{n,p} = 1,13$$

$$\Delta T_ф = 1,13 \cdot 0,0003 = 0,00034\,с$$

$$a_{1ср} = \frac{1}{4}(0,19 + 0,22 + 0,23 + 0,18) = 0,205\,м$$

$$a_{2ср} = \frac{1}{4}(0,4 + 0,35 + 0,3 + 0,45) = 0,375\,м$$

$$\Delta g = 9{,}67 \cdot \left(2\frac{0{,}00034}{1{,}55} + 2\frac{0{,}0005}{0{,}205+0{,}375}\right) = 0{,}021 \frac{м}{с^2}$$

$$g = (9{,}67 \pm 0{,}021)\frac{м}{с^2} \approx (9{,}67 \pm 0{,}02)\frac{м}{с^2}$$

Ответ: $g = (9{,}67 \pm 0{,}02)\frac{м}{с^2}$

Вывод: На примере физического маятника я изучил закономерности его движения, измерил период колебаний физического маятника в зависимости от положения его центра инерции относительно точки подвеса, а затем на основе полученных данных определил ускорение свободного падения, ~~которое~~ значение которого получилось близко к истинному.

Пустоветов К.М. П. [подпись]