Лекция 9-10
по теме:
Квадратичные формы. Знакоопределённость форм. Критерий Сильвестра. Преобразование матрицы квадратичной формы.

Линейная функция.Линейная форма

Определение 6.1. Функцию $f(x)$, определенную на линейном (векторном) пространстве V, называют ***линейной***, если она удовлетворяет условиям:

а) $f(x+y)=f(x)+f(y)$;

б) $f(\alpha x)=\alpha f(x)$,

где x, y — произвольные элементы из V; α — любое действительное число.

Эти условия могут быть заменены одним условием:

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y),$$

из которого следует общее условие

$$f(\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\ldots+\lambda_n z_n)=\lambda_1 f(z_1)+\lambda_2 f(z_2)+\ldots+\lambda_n f(z_n)$$

для любых элементов $z_1, z_2, \ldots, z_n \in V$ и любых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Отметим, что линейная функция на линейном пространстве не является новым понятием. Это в точности то же самое, что и линейное отображение данного линейного пространства в одномерное арифметическое пространство.

Пример 6.1. Функция, которая каждому элементу ставит в соответствие нуль, является линейной. ■

Пример 6.2. Пусть $\mathcal{E}$ — n-мерное евклидово пространство. Выберем в нем некоторый фиксированный элемент $\boldsymbol{a}$. Тогда каждому элементу $\boldsymbol{x}$ из $\mathcal{E}$ можно поставить в соответствие число $\beta = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$, для которого выполняются условия линейности и функция сопоставления является линейной. ■

Пусть $\{e\} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — базис в пространстве V, элемент $\boldsymbol{x} \in V$. Выразим функцию $f(\boldsymbol{x})$ через координаты элемента $\boldsymbol{x}$ в заданном базисе $\{e\}$.

Для любого элемента $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ значение функции $f(\boldsymbol{x})$ есть

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{e}_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты элемента $\boldsymbol{x} \in V$.

Обозначим значение функции f для элементов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ через

$$f(\boldsymbol{e}_1) = b_1,\ f(\boldsymbol{e}_2) = b_2,\ \ldots,\ f(\boldsymbol{e}_n) = b_n.$$

Тогда

$$f(\boldsymbol{x}) = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n. \qquad (6.1)$$

Правая часть равенства (6.1) есть однородный многочлен первой степени, или *линейная форма* от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Итак, *если в пространстве V задан базис $\{e\} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, то линейная функция $f(\boldsymbol{x})$ записывается в виде линейной формы* (6.1), *выражающей значение $f(\boldsymbol{x})$ через координаты элемента $\boldsymbol{x}$ относительно этого базиса.*

Матрица линейного отображения n-мерного пространства в одномерное имеет размер $1 \times n$, т. е. представляет собой строку длиной n. Матрица линейной формы — это строка $(b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n)$.

Биленейная функция. Биленейная форма

Билинейная функция. Билинейная форма

Определение 6.2. ***Билинейной функцией*** в линейном пространстве V называют функцию двух переменных $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, удовлетворяющую для любых элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ и любого действительного числа α равенствам

$$B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \quad B(\alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}); \tag{6.2}$$

$$B(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}), \quad B(\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}) = \alpha B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{6.3}$$

Соотношения (6.2) означают линейность функции $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ по первому аргументу, а соотношения (6.3) — по второму аргументу.

Выразим билинейную функцию $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ через координаты $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ в заданном базисе $\{\boldsymbol{e}\} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ пространства V. Тогда для элементов $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n$

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j B(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j,$$

где $b_{ij} = B(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ — числа (их количество равно n^2), которые не зависят от $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, а зависят только от базиса.

Определение 6.3. Представление функции $B(x, y)$ в виде многочлена

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \tag{6.4}$$

называют ***билинейной формой*** на линейном пространстве, а числа b_{ij} — ***коэффициентами билинейной формы*** в базисе $\{e\} = (e_1, e_2, ..., e_n)$.

Коэффициенты билинейной формы b_{ij} записывают в виде квадратной матрицы порядка n:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу называют *матрицей билинейной формы* в заданном базисе, а ранг этой матрицы — *рангом билинейной формы*.

Перепишем равенство (6.4) в матричном виде:

$$B(x, y) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{Y}, \tag{6.5}$$

где $\mathbf{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^{\mathrm{T}}$ — столбцы координат соответственно элементов x и y в базисе $\{e\} = (e_1, e_2, ..., e_n)$.

Определение 6.4. Билинейную форму $B(x, y)$ называют ***симметрической***, если при любых $x, y \in V$ имеет место равенство

$$B(x, y) = B(y, x).$$

Если билинейная форма симметрическая, то $b_{ij} = b_{ji}$ и, следовательно, *матрица билинейной формы симметрическая*. И наоборот, пусть матрица билинейной формы симметрическая, т. е. $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$. Тогда

$$B(x, y) = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{Y})^{\mathrm{T}} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{X} = B(y, x)$$

и, следовательно, билинейная форма $B(x, y)$ симметрическая. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6.1. Билинейная форма является *симметрической* тогда и только тогда, когда ее *матрица* (в любом базисе) *симметрическая*.

Замечание 6.1. Пусть $\{e\} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ и $\{f\} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ — два базиса в пространстве V, а $\mathbf{P}$ — матрица перехода от первого базиса ко второму. Предположим, что билинейная форма $B(x, y)$ имеет в базисе $\{e\}$ матрицу $\mathbf{B}_e$, а в базисе $\{f\}$ — матрицу $\mathbf{B}_f$. Тогда справедлива следующая формула преобразования матрицы билинейной формы:

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_e\mathbf{P}. \ \blacksquare \qquad (6.6)$$

Примеры решения задач

Задача 6.1. Заданы линейные формы

$$f(\boldsymbol{x}) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4;$$
$$g(\boldsymbol{x}) = -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 + x_6 - 7x_7.$$

Составить матрицы этих линейных форм.

◄ Матрицами линейных форм $f(\boldsymbol{x})$ и $g(\boldsymbol{x})$ являются соответственно

$$\mathbf{A}_f = (3 \quad 2 \quad -3 \quad 4) \quad \text{и} \quad \mathbf{A}_g = (-1 \quad -1 \quad 3 \quad 2 \quad -5 \quad 1 \quad -7). \ ►$$

Задача 6.2. Пусть в некотором базисе билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ имеет вид

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + 5x_2y_1 - x_2y_2 + 6x_2y_3 - 8x_3y_1 + x_3y_3.$$

Составить матрицу билинейной формы в заданном базисе.

◄ Матрицей билинейной формы в заданном базисе является матрица

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 6 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \ ►$$

Задача 6.3. Билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в базисе $\{\boldsymbol{e}\} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ имеет вид

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 - x_2y_2 + 2x_2y_3 - x_3y_3.$$

Найти выражение этой билинейной формы через координаты элементов в базисе $\{\boldsymbol{f}\} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$, если $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}_2 = -\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

◄ Составим матрицу перехода $\mathbf{P}$ от базиса $\{\boldsymbol{e}\} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $\{\boldsymbol{f}\} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся формулой (6.6). Составим матрицу $\mathbf{B}_e$:

$$\mathbf{B}_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее вычислим

$$\mathbf{B}_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим следующий вид билинейной формы в базисе $\{\boldsymbol{f}\}$ с новыми переменными $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{u}$:

$$B(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}) = -z_1u_1 - z_1u_2 + z_1u_3 - z_2u_1 + z_2u_2 - z_3u_1 - z_3u_2. \blacktriangleright$$

Квадратичные формы

Рассмотрим симметрическую билинейную форму $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Если положить $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, то билинейная форма примет вид $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, в дальнейшем будем обозначать ее $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$.

Определение 6.5. Однородный многочлен второй степени от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ с действительными коэффициентами b_{ij}

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \quad (b_{ij} = b_{ji}) \qquad (6.7)$$

называют ***квадратичной формой*** от этих переменных.

В развернутом виде равенство (6.7) можно записать так:

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = b_{11} x_i^2 + 2b_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2b_{1n} x_1 x_n + b_{22} x_2^2 + 2b_{23} x_2 x_3 + \ldots +$$
$$+ 2b_{n-1,n} x_{n-1} x_n + b_{nn} x_n^2.$$

12.1 Основные определения

Истоки теории квадратичных форм лежат в аналитической геометрии, а именно в теории кривых (и поверхностей) второго порядка. Мы уже знаем, что уравнение центральной кривой второго порядка на плоскости, после перенесения начала прямоугольных координат в центр этой кривой, имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D. \tag{12.1}$$

Далее, также из курса аналитической геометрии мы знаем, что можно совершить такой поворот осей координат на некоторый угол α, т. е. такой переход от координат x, y к координатам x', y':

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{cases} \tag{12.2}$$

что в новых координатах уравнение кривой будет иметь ***канонический*** вид

$$A'x'^2 + C'y'^2 = D. \tag{12.3}$$

В уравнении (12.3) коэффициент при произведении неизвестных $x'y'$ равен нулю. Преобразование координат (12.2) можно толковать, очевидно, как линейное, т.е. как линейный оператор. Этот оператор применяется к левой части уравнения (12.1), и поэтому можно сказать, что левая часть уравнения (12.1) невырожденным линейным оператором (12.2) превращается в левую часть уравнения (12.3).

Многочисленные приложения потребовали построения аналогичной теории для случая, когда число неизвестных вместо двух равно любому *n*, а коэффициенты являются или действительными, или же любыми комплексными числами.

Обобщая выражение, стоящее в левой части уравнения (12.1), мы приходим к следующему понятию.

Квадратичной формой f от n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, называется сумма, каждый член которой является или квадратом одного из этих неизвестных, или произведением двух разных неизвестных.

Квадратичная форма называется действительной или комплексной в зависимости от того, являются ли ее коэффициенты соответственно действительными или комплексными числами. Мы в дальнейшем будем рассматривать только действительные квадратичные формы.

Считая, что в квадратичной форме f уже сделано приведение подобных членов, введем следующие обозначения для коэффициентов этой формы: коэффициент при x_i^2 обозначим через a_{ii}, а коэффициент при произведении $x_i x_j$ для $i \neq j$ - через $2a_{ij}$. Веденные нами обозначения предполагают справедливость равенства

$$a_{ji} = a_{ij}. \qquad (12.4)$$

Член $2a_{ij}x_i x_j$ можно записать, таким образом, в виде

$$2a_{ij}x_i x_j = a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_j x_i,$$

а всю квадратичную форму f - в виде суммы всевозможных членов $a_{ij}x_i x_j$, где i и j уже независимо друг от друга принимают значения от 1 до n. Таким образом, квадратичную форму переменных x_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ можно записать следующим образом:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\,; \qquad (12.5)$$

в частности, при $i = j$ получается член $a_{ii}x_i^2$.

Составим матрицу из коэффициентов квадратичной формы (12.5):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (12.6)$$

и назовем ее ***матрицей квадратичной формы*** (12.5).

В силу условия (12.4) матрица A - симметрическая (ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой).

Очевидно, квадратичной форме (12.5) n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответствует единственная симметрическая матрица (12.6).

Обратно, всякой симметрической матрице (12.6) соответствует единственная квадратичная форма с точностью до обозначения переменных.

Например, составим матрицу квадратичной формы

$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2$

Решение. Чтобы составить матрицу A, нужно данную квадратичную форму записать в виде (12.1). Для этого смешанные члены $-3x_1x_2$, $4x_1x_3$, $-8x_2x_3$ представим в виде суммы двух равных слагаемых:

$-1{,}5x_1x_2 - 1{,}5x_2x_1$, $2x_1x_3 + 2x_3x_1$, $-4x_2x_3 - 4x_3x_2$.

Таким образом, заданной квадратичной форме соответствует симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}5 & 2 \\ -1{,}5 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы. Квадратичная форма n переменных называется ***невырожденной***, если ее матрица – невырожденная, т.е. $r = n$, и ***вырожденной***, если $r < n$.

Квадратичную форму (12.5) n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ можно записать в матричном виде. Действительно, если X - матрица-столбец из переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, а X^T - матрица, полученная транспонированием матрицы X, т.е. строка из тех же переменных, то

$$X^T AX = (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{n1}x_n, a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{n2}x_n, ..., a_{1n}x_1 +$$

$$+ a_{2n}x_2 + ... + a_{nn}x_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Итак, мы получили, что

$$X^T AX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j ,$$

т.е. выражение вида

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX \qquad (12.7)$$

представляет собой ***матричный вид квадратичной формы*** (12.5).

Квадратичные формы.

Линейной формой n *переменных* называют *однородный* многочлен 1-й степени:

$L(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n$, где:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – какие-то конкретные числа* *(предполагаем, что хотя бы одно из них отлично от нуля)*, а $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ – переменные, которые могут принимать произвольные значения.

С термином «однородный» мы уже сталкивались и в данном случае он подразумевает, что у многочлена нет приплюсованной константы a_0.

Например: $L(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$ – линейная форма двух переменных

Теперь форма квадратичная. **Квадратичной формой** n *переменных* называют *однородный* многочлен 2-й степени, **каждое слагаемое которого** содержит либо квадрат переменной, либо парное произведение переменных. Так, например, квадратичная форма двух переменных x_1, x_2 имеет следующий вид:

$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$

Внимание! Это стандартная запись, и что-то менять в ней не нужно!

a_{11} – *в этом слагаемом находится произведение* x_1 *и* x_1 *(квадрат);*
a_{22} – *здесь произведение* $x_2 \cdot x_2$*;*
a_{12} – *и здесь произведение* $x_1 \cdot x_2$.

Далее будем полагать, что хотя бы одна из констант не равна нулю, и вот, пожалуйста, «неполный» пример: $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2$, в котором:
$a_{11} = 3, a_{22} = 0, a_{12} = -2$ Иногда встречается «школьный» вариант оформления в духе $Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$
И квадратичная форма трёх переменных содержит уже шесть членов:
$Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$
Далее ситуация начинает усугубляться:
$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 +$
$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4$
и усугублять мы её дальше не будем, т.к. формы с бОльшим количеством переменных встречаются довольно редко.
Однако общую формулу запишем,»:
$Q(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) =$
$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 +$
$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n +$
$+ 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n +$
$+ 2a_{34}x_3x_4 + \ldots + 2a_{3n}x_3x_n +$
...
$+ 2a_{(n-1)n}x_{n-1}x_n$
– внимательно изучаем каждую строчку !

Квадратичная форма содержит n слагаемых с квадратами переменных и C_n^2 слагаемых с их парными произведениям. Больше ничего – никаких «одиноких иксов» и никакой приплюсованной константы (тогда уже получится не квадратичная форма, а *неоднородный* многочлен 2-й степени).

Матричная запись линейной формы

В задачах широко распространенная матричная запись квадратичных форм. Объяснения опять начну с формы *линейной*, например, от трёх переменных: $L(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$. Её можно записать, как произведение двух матриц:

$$L(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

И действительно, выполняя матричное умножение, получаем матрицу «один на один»: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \end{pmatrix}$, единственный элемент которой можно эквивалентно записать вне матрицы: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$.

Легко понять, что линейная форма «эн» переменных записывается в виде:

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матричная запись квадратичной формы

Квадратичная форма представима в виде **произведения уже трёх матриц**:
$Q(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x^T \cdot A \cdot x$, где:

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец переменных;

$x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$ – его **транспонированная** строка;

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – **матрица квадратичной формы**.

Это так называемая *симметрическая* матрица, на *главной диагонали* которой расположены коэффициенты $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ при квадратах неизвестных, а симметрично относительно неё – «смешанные» коэффициенты, причём, строго на «своих местах» *(например,* a_{13} *– в 1-й строке, 3-м столбце и 1-м столбце, 3-й строке).*

Определитель $|A|$ называют **дискриминантом** квадратичной формы, а **ранг матрицы** A – **рангом** квадратичной формы.

Если **перемножить три матрицы** $x^T \cdot A \cdot x$, то получится в точности длинная «простыня» из предыдущего параграфа, но разворачивать её мы, конечно, не будем, а посмотрим, как это происходит в элементарном случае

$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$. Согласно общей формуле, матричная запись данной формы имеет следующий вид:

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

И в самом деле:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

далее:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \cdot x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2) \cdot x_2 =$$

$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$, в чём и требовалось убедиться.

Как вариант, сначала можно было перемножить правые матрицы, и затем первую матрицу умножить на полученный результат.

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Записать квадратичную форму в матричном виде и выполнить проверку. Определить дискриминант и ранг формы.

$$3x_1x_2 - x_2^2 + x_2x_1$$

Пример 1

Записать квадратичную форму в матричном виде и выполнить проверку. Определить дискриминант и ранг формы.

$3x_1x_2 - x_2^2 + x_2x_1$

Решение: *сначала приведём подобные слагаемые:*

$3x_1x_2 - x_2^2 + x_2x_1 = -x_2^2 + 4x_1x_2$

Квадратичная форма двух переменных имеет вид $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$, *в данном случае:* $a_{11} = 0, a_{22} = -1, a_{12} = 2$. *Запишем форму в матричном виде:*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Проверка:

1) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2x_2 & 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_2 \cdot x_1 + (2x_1 - x_2) \cdot x_2 = 2x_1x_2 + 2x_1x_2 - x_2^2 = -x_2^2 + 4x_1x_2,$

Вычислим дискриминант формы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4$$

Поскольку $|A| \neq 0$, *то ранг формы равен двум.*

Ответ: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $|A| = -4$, *ранг формы равен двум.*

Пример 2

Записать матрицу квадратичной формы, найти её ранг и дискриминант

$3x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2 - x_3^2 + 2x_2x_3$

Решение:

– слагаемое $3x_1^2$ дважды содержит 1-ю переменную, поэтому $a_{11} = 3$;

– из аналогичных соображений определяем $a_{22} = -2,\ a_{33} = -1$ и сразу записываем результаты на главную диагональ симметрической матрицы: $\begin{pmatrix} 3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & -2 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -1 \end{pmatrix}$.

Так как в слагаемое $4x_1x_2$ входят 1-я и 2-я переменная, то $a_{12} = 2$ *(не забываем поделить на 2)* и данный коэффициент занимает свои законные места: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & a_{13} \\ 2 & -2 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -1 \end{pmatrix}$.

Поскольку в форме отсутствует член с произведением x_1x_3 (а точнее, присутствует с нулевым множителем: $0 \cdot x_1x_3$), то $a_{13} = 0$, и на холст отправляются два нуля: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & a_{23} \\ 0 & a_{23} & -1 \end{pmatrix}$.

И, наконец, из слагаемого $2x_2x_3$ определяем $a_{23} = 1$, после чего картина завершена:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

– матрица квадратичной формы. По условию не требовалось записывать матричное уравнение, однако науки ради:

$$x^T \cdot A \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Теперь определим **ранг** формы. Так как в матрице есть хотя бы один ненулевой элемент, например, $\delta_1 = 3 \neq 0$, то ранг *не меньше* единицы. Теперь вычислим **минор** $\delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 \neq 0$, значит, ранг *не меньше* двух. И осталось проверить минор 3-го порядка, т.е. определитель всей матрицы. Здесь я **ко второму столбцу прибавлю третий** и **раскрою определитель по 3-й строке**:

$$\delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 4) = 7 \neq 0,$$

значит, $\text{Ранг}\,(A) = 3$

Дискриминант квадратичной формы получен автоматом.

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, ранг равен трём, дискриминант $|A| = 7$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Пример 3

Записать матрицу квадратичной формы

$$F(x_1, x_2, x_3) = -5x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 16x_1x_2 - 12x_2x_3$$

Пример 4

Записать квадратичную форму, если ее матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример 3

Записать матрицу квадратичной формы

$$F(x_1, x_2, x_3) = -5x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 16x_1x_2 - 12x_2x_3$$

Решение

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & -5 & -6 \\ 8 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 4

Записать квадратичную форму, если ее матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Восстановить квадратичную форму по её матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Пример 5

Восстановить квадратичную форму по её матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

– сначала смотрим на главную диагональ и записываем слагаемые с квадратами переменных;
– затем анализируем симметричные элементы 1-й строки (или 1-го столбца), и записываем все слагаемые, в которые входит 1-я переменная (не забывая удвоить коэффициенты);
– далее смотрим на оставшиеся симметричные элементы 2-й строки *(справа от диагонали)* либо 2-го столбца *(ниже диагонали)* и записываем соответствующие парные произведения (с удвоенными коэффициентами!).
– и, наконец, анализируем правую нижнюю пару симметричных чисел.

Пример 5. ***Решение:***

*симметрическая матрица 4*4 определяет квадратичную форму 4 переменных. Коэффициенты главной диагонали* $a_{11}=1, a_{22}=-1, a_{33}=0, a_{44}=-2$*, следовательно:*

$$x_1^2 - x_2^2 - 2x_4^2$$

Симметричные коэффициенты 1-й строки: $a_{12}=0, a_{13}=2, a_{14}=-1$*, таким образом:*

$$x_1^2 - x_2^2 - 2x_4^2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4$$

Оставшиеся симметричные элементы 2-й строки: $a_{23}=3, a_{24}=0$*, и:*

$$x_1^2 - x_2^2 - 2x_4^2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3$$

И, наконец, $a_{34}=-5$

Ответ: $x_1^2 - x_2^2 - 2x_4^2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 10x_3x_4$

12.2 Преобразование квадратичной формы линейным однородным оператором

Рассмотрим квадратичную форму (12.7). Перейдем к новым переменным $y_1, y_2, ..., y_n$ по формулам

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + ... + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + ... + b_{2n}y_n, \\ .... \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + ... + b_{nn}y_n, \end{cases} \quad (12.8)$$

или в матричном виде

$$X = BY, \quad (12.9)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (12.10)$$

В квадратичной форме (12.7) вместо $x_1, x_2, ..., x_n$ подставим их выражения через $y_1, y_2, ..., y_n$, определяемые формулами (12.8), получим квадратичную форму $\varphi(y_1, y_2, ..., y_n)$ n переменных $y_1, y_2, ..., y_n$ с некоторой матрицей C. В

этом случае говорят, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ переводится в квадратичную форму $\varphi(y_1, y_2, ..., y_n)$ линейным однородным оператором (12.8). Линейный однородный оператор (12.9) называется ***невырожденным***, если $\det B \neq 0$.

Теорема 12.1 *Квадратичная форма* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *с матрицей* A *линейным однородным оператором* $X = BY$ *переводится в квадратичную форму* $\varphi(y_1, y_2, ..., y_n)$ *с матрицей* $C = B^T AB$.

Доказательство. В квадратичную форму $f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$ подставим $X = BY$, получаем

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX = (BY)^T A(BY) = \left(Y^T B^T ABY\right) = Y^T \left(B^T AB\right)Y,$$

или

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = Y^T CY,$$

где $C = B^T AB$.

Поскольку

$$C^T = \left(B^T AB\right)^T = \left(B^T (AB)\right)^T = (AB)^T \left(B^T\right)^T = \left(B^T A^T\right)B = B^T AB = C,$$

т. е. $C^T = C$, то C - симметрическая матрица. Следовательно, $C = B^T AB$ является матрицей квадратичной формы $\varphi(y_1, y_2, ..., y_n)$.

Следствие 1 *Определители матриц конгруэнтных невырожденных действительных квадратичных форм имеют одинаковые знаки.*

Действительно, поскольку матрицы A и C двух конгруэнтных квадратичных форм связаны соотношением $C = B^T AB$, где B - невырожденная матрица, то

$$\det C = \det\left(B^T AB\right) = \det B^T \cdot \det A \cdot \det B = (\det B)^2 \cdot \det A,$$

или

$$\det C = (\det B)^2 \cdot \det A.$$

Следовательно, $\det C \cdot \det A > 0$, т.к. $(\det B)^2 > 0$.

Следствие 2 *Конгруэнтные квадратичные формы имеют одинаковые ранги.*

Действительно, поскольку ранг матрицы не меняется при умножении ее слева или справа на невырожденную матрицу и $C = B^T AB$, то $rangC = rangA$.

Действительно, поскольку ранг матрицы не меняется при умножении ее слева или справа на невырожденную матрицу и $C = B^T AB$, то $rangC = rangA$.

Рассмотрим теперь, по аналогии с указанной в начале параграфа геометрической задачей приведения уравнения центральной кривой второго порядка к каноническому виду (12.3), вопрос о приведении произвольной квадратичной формы некоторым невырожденным линейным оператором к виду суммы квадратов неизвестных, т.е. к такому виду, когда все коэффициенты при произведениях различных неизвестных равны нулю. Мы уже знаем этот специальный вид квадратичной формы называется ***каноническим***.

Предположим сначала, что квадратичная форма f от n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ уже приведена невырожденным линейным оператором к каноническому виду

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + ... + b_n y_n^2, \tag{12.11}$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ - новые неизвестные. Некоторые из коэффициентов $b_1, b_2, ..., b_n$ могут, конечно, быть нулями. Докажем, что *число отличных от нуля коэффициентов в* (12.11) *равно рангу r формы f*.

В самом деле, так как мы пришли к (12.11) при помощи невырожденного оператора, то квадратичная форма, стоящая в правой части равенства (12.11), также должна быть ранга r. Однако матрица этой квадратичной формы имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & b_n \end{pmatrix},$$

И требование, чтобы эта матрица имела ранг r, равносильно предположению, что на ее главной диагонали стоит ровно r отличных от нуля элементов.

Основная теорема о квадратичных формах

Теорема 12.2 *Любая квадратичная форма некоторым невырожденным линейным оператором может быть приведена к каноническому виду.*

Доказательство проведем индукцией по числу переменных. При $n=1$ теорема верна, так как в этом случае квадратичная форма $f(x_1)=a_{11}x_1^2$ имеет канонический вид. Докажем теорему для квадратичных форм от n переменных, считая ее уже доказанной для форм с меньшим числом переменных. Предположим, что среди коэффициентов $a_{ii}\,(i=1, 2, \ldots, n)$ данной квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

имеются отличные от нуля. Пусть $a_{11}\neq 0$, тогда выражение

$$a_{11}^{-1}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)^2,$$

являющееся квадратичной формой, содержит такие же члены с переменной x_1, что и форма f, поэтому разность

$$f-a_{11}^{-1}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)^2=f_1,$$

будет квадратичной формой, не зависящей от x_1, а только от $x_2, x_3, \ldots, x_n$, т.е. $f_1=f_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, откуда $f=a_{11}^{-1}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)^2+f_1$.

Перейдя к новым переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по формулам

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\; y_i=x_i\;\; (i=2,3, \ldots, n), \tag{12.12}$$

получим квадратичную форму

$$f=a_{11}^{-1}y_1^2+f_2,$$

причем

$$f_2=f_2(y_2, y_3, \ldots, y_n). \tag{12.13}$$

Так как квадратичная форма f_2 зависит от меньшего числа переменных, по предположению ее можно привести к каноническому виду. Следовательно, квадратичная форма f также приведена к каноническому виду (12.13). Отметим, что линейный оператор (12.12) является невырожденным, так как его определитель равен $a_{11}\neq 0$. Оператор, обратный оператору (12.12), также будет невырожденным, он приводит исходную форму f к виду (12.13).

Случай, когда все коэффициенты $a_{ii} = 0\ (i = 1, 2, ..., n)$, но, например, $a_{12} \neq 0$, с помощью оператора

$$x_1 = z_1 - z_2,\ x_2 = z_1 + z_2,\ x_i = z_i\ \ (i = 3, 4, ..., n)$$

сводится к предыдущему. Действительно, этот оператор является невырожденным, ибо его определитель отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

В результате действия этого оператора член $2a_{12}x_1x_2$, принимает вид

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2;$$

в конгруэнтной квадратичной форме $\varphi(z_1, z_2, ..., z_n)$ будут отличными от нуля коэффициенты при квадратах переменных z_1 и z_2.

Таким образом, квадратичная форма действием нескольких невырожденных операторов, которые можно заменить одним невырожденным оператором – их произведением, приводится к каноническому виду.

МИРЭА Российский технологический университет

Например, приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1. \qquad (12.14)$$

Ввиду отсутствия в этой форме квадратов неизвестных мы применим сначала невырожденный линейный оператор

$$x_1 = y_1 - y_2,\ x_2 = y_1 + y_2,\ x_3 = y_3$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

после чего получим:

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3.$$

Теперь коэффициент при y_1^2 отличен от нуля, и поэтому из нашей формы можно выделить квадрат одного неизвестного. Полагая

$$z_1 = 2y_1 - 2y_3,\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3,$$

т.е. действуя линейным оператором, для которого обратный будет иметь матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

мы приведем f к виду

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 - 8z_2z_3. \qquad (12.15)$$

Пока выделился лишь квадрат неизвестного z_1, так как форма еще содержит произведение двух других неизвестных. Используя неравенство нулю коэффициентов при z_2^2, еще раз применим изложенный выше метод.

Совершая линейный оператор

$$t_1 = z_1,\ t_2 = -2z_2 - 4z_3,\ t_3 = z_3,$$

для которого обратный имеет матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

мы приведем, наконец, форму f к каноническому виду

$$f = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 + 6t_3^2. \qquad (12.16)$$

Линейный оператор, приводящий (12.14) сразу к виду (12.16), будет иметь своей матрицей произведение

$$ABC = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно подстановкой проверить, что невырожденный (так как определитель равен $-1/2$) линейный оператор

$$x_1 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + 3t_3,$$
$$x_2 = \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_2 - t_3,$$
$$x_3 = t_3$$

превращает (12.14) в (12.16).

12.3 Нормальный вид квадратичной формы

Каноническая квадратичная форма называется ***нормальной*** (или имеет *нормальный вид*), если $|\alpha_{ii}|=1$ $(i=1,2,\ldots,r)$, т.е. отличные от нуля коэффициенты при квадратах переменных равны $+1$ или -1.

Например, квадратичная форма $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=6x_1^2+4x_3^2-3x_4^2$, для которой $\alpha_{11}=6$, $\alpha_{22}=0$, $\alpha_{33}=4$, $\alpha_{44}=-3$, имеет канонический вид; квадратичная форма $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-x_3^2+x_4^2$ является нормальной, так как $\alpha_{11}=1$, $\alpha_{22}=0$, $\alpha_{33}=-1$, $\alpha_{44}=1$.

Теорема 12.3 *Любую действительную квадратичную форму линейным невырожденным оператором можно привести к нормальному виду.*

Доказательство. Мы уже знаем, что любую квадратичную форму $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ можно привести к каноническому виду. Представим этот канонический вид следующим образом:

$$\varphi(y_1,y_2,\ldots,y_n)=c_1y_1^2+c_2y_2^2+\ldots+c_ky_k^2-c_{k+1}y_{k+1}^2-\ldots-c_ry_r^2\quad(0\le k\le r),$$

где все числа c_i $(i=1,2,\ldots,k,k+1,\ldots,r)$ положительны. Применяя невырожденный линейный оператор $z_i=\sqrt{c_i}\,y_i$ $(i=1,2,\ldots,r)$, $z_j=y_j$ $(j=r+1,\ldots,n)$, получаем квадратичную форму

$$\psi(z_1,z_2,\ldots,z_n)=z_1^2+z_2^2+\ldots+z_k^2-z_{k+1}^2-\ldots-z_r^2$$

в нормальном виде. Очевидно, что число входящих сюда квадратов равно рангу формы.

Знакоопределённость квадратичной формы. Критерий Сильвестра

До сих пор мы рассматривали «внешнее устройство» форм и пришло время изучить их функциональное назначение. Да, по существу, они работают, как функции. Вернёмся к простенькой *линейной* форме $L(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$.

Как отмечалось в начале, переменные x_1, x_2 могут принимать произвольные действительные значения *(мы ограничились ими)*, и каждой такой паре соответствует определённое значение $L(x_1, x_2)$, например:

$L(2,-1) = 2 - 2\cdot(-1) = 2 + 2 = 4$
$L(0, 1) = 0 - 2\cdot 1 = -2$, и так далее.

Говоря языком науки, перед нами *скалярная* функция *векторного* аргумента, в которой каждому *вектору* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ставится в соответствие определённое число $L(x_1, x_2)$. Обращаю ваше внимание, что сейчас идёт речь не о **геометрическом векторе**, а о векторе в его **алгебраическом понимании**.

В зависимости от значений x_1, x_2 рассматриваемая форма может принимать как положительные, так и отрицательные значения, и то же самое касается любой линейной формы $L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n$ – если хотя бы один из её коэффициентов отличен от нуля, то она может оказаться как положительной, так и отрицательной (в зависимости от значений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$).

Такая форма называется **знакопеременной**. И если с линейной формой всё прозрачно, то с формой квадратичной дела обстоят куда более интересно:

Рассмотрим

$Q(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Совершенно понятно, что данная форма может принимать значения любого знака, таким образом, **квадратичная форма тоже может быть знакопеременной**.

А может и не быть:

$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 > 0$ – всегда, если только x_1, x_2 одновременно не равны нулю.

$Q(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 4x_2^2 < 0$ – для любого *вектора* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, кроме нулевого $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

И вообще, если для любого *ненулевого* вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Q(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) > 0$, то квадратичную форму называют **положительно определённой**; если же $Q(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) < 0$ – то **отрицательно определённой**.

Также коснёмся «краевых» случаев: если для любого *ненулевого* вектора $x:\ Q(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \geq 0$, то форма определена **неотрицательно**, если $Q(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \leq 0$ – то **неположительно**. У этих форм существует *ненулевые* векторы x, при которых $Q(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$.

Здесь можно привести такой пример
$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$

Выделяя **полный квадрат**, сразу видим *неотрицательность* формы: $Q(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$, причём, она равна нулю при любом векторе с равными координатами, например: $Q(5, 5) = (5-5)^2 = 0$.
«Зеркальный» пример *неположительно* определённой формы:
$Q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 = -(x_1 + x_2)^2 \leq 0$
И всё бы было хорошо, всё гладко, но определённость квадратичной формы виднА лишь в простых примерах. Как обстоят дела, например, в
$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2$?

Можно предположить, что форма определена положительно, но так ли это на самом деле? Вдруг существуют значения x_1, x_2, при которых она меньше нуля?
На этот счёт существует **теорема**: если ВСЕ **собственные числа** матрицы квадратичной формы положительны*, то она определена положительно. Если все отрицательны – то отрицательно.
* *В теории доказано, что все собственные числа действительной симметрической матрицы* ***действительны***
Запишем матрицу вышеприведённой формы:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$ и из уравнения $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 3/2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ найдём её **собственные значения**:
$(1-\lambda)\left(\frac{3}{2} - \lambda\right) - 1 = 0$

$\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$

$2\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$
Решаем старое доброе **квадратное уравнение**:
$D = 25 - 8 = 17$
$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{4} > 0, \quad \lambda_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{4} > 0$, значит, форма $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2$ определена положительно, т.е. при любых ненулевых значениях x_1, x_2 она больше нуля.

Рассмотренный метод вроде бы рабочий, но есть одно большое НО. Уже для матрицы «три на три» искать собственные числа – есть занятие долгое и неприятное; с высокой вероятностью получится многочлен 3-й степени с иррациональными корнями.

Критерий Сильвестра

Сначала напомню, что такое *угловые миноры* матрицы. Это **определители** $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ которые «разрастаются» из её левого верхнего угла:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{13} & a_{23} \end{matrix} & a_{33} \end{matrix}} & \begin{matrix} \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{2n} \\ \dots & a_{3n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \end{matrix} & \begin{matrix} \dots & \dots \\ \dots & a_{nn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

и последний из них в точности равен определителю матрицы.

Теперь **критерий**:

1) если ВСЕ угловые миноры матрицы формы больше нуля, то она **определена положительно**, если они *не отрицательны* – то **неотрицательно**.

2) если миноры знакочередуются, причём, первый минор отрицателен, то квадратичная форма является **отрицательно определённой**. Если нечётные миноры *неположительные*, а чётные *неотрицательные*, то форма определена **неположительно**

Проанализируем угловые миноры матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$:

$\delta_1 = 1 > 0$, и это сразу говорит нам о том, что форма не определена отрицательно.

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$$

Вывод: все угловые миноры больше нуля, значит, форма $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2$ определена положительно.

Запишем матрицу формы
$Q(x_1, x_2) = -x_2^2 + 4x_2x_1$ из *Примера 1*:
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
первый её угловой минор
$\delta_1 = 0$
, а второй
$\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 < 0$
,
откуда следует, что форма знакопеременна, т.е. в зависимости от значений x_1, x_2, может принимать как положительные, так и отрицательные значения.
Возьмём форму
$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2 - x_3^2 + 2x_2x_3$
и её матрицу из *Примера 2*:
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
:
$\delta_1 = 3 > 0$,
следовательно, форма точно не отрицательна.
$\delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 < 0$
,
и точно не положительна *(т.к. все угловые миноры должны быть положительными)*.
Вывод: форма знакопеременна.

Пример 6

Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность

$Q(x_1, x_2, x_3) = \alpha \cdot x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

Сначала запишем матрицу формы,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислим угловые миноры:

$\delta_1 = \alpha$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\alpha - 1$$

третий определитель я раскрою по 3-й строке:

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 2 - (-2\alpha - 1) = 2 + 2\alpha + 1 = 2\alpha + 3$$

Дальнейшее решение удобно разбить на 2 пункта:

1) Выясним, существуют ли значения «альфа», при которых форма определена положительно или неотрицательно. Согласно критерию Сильвестра, условию положительности формы соответствует следующая **система линейных неравенств**:

$$\begin{cases} \delta_1 > 0 \\ \delta_2 > 0 \\ \delta_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ -2\alpha - 1 > 0 \\ 2\alpha + 3 > 0 \end{cases}$$

В соответствии с поставленной задачей, сначала разберёмся со 2-м неравенством:

$-2\alpha > 1$

$\alpha < -\frac{1}{2}$, что противоречит первому неравенству системы.

Таким образом, система **несовместна**, а значит, форма не может быть положительной или неотрицательной ни при каких значениях «альфа».

2) Проведём исследование на отрицательность / неположительнось. Условию отрицательности формы соответствует следующая **система линейных неравенств**:

$$\begin{cases} \delta_1 < 0 \\ \delta_2 > 0 \\ \delta_3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \\ -2\alpha - 1 > 0 \\ 2\alpha + 3 < 0 \end{cases}$$

Второе неравенство уже решено: $\alpha < -\frac{1}{2}$, и оно не противоречит первому. И третье неравенство тоже «вписалось в рамки»: $\alpha < -\frac{3}{2}$.
Таким образом, имеем совместную систему:

$$\begin{cases} \alpha < 0 \\ \alpha < -\frac{1}{2} \\ \alpha < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

из которой следует, что форма определена отрицательно при $\alpha < -\frac{3}{2}$. Например, если $\alpha = -2$:

$Q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ – то при любом *ненулевом* векторе $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ данная форма будет строго отрицательна.

Осталось исследовать «пограничный» случай. Если $\alpha = -\frac{3}{2}$, то:

$$\delta_1 = \alpha = -\frac{3}{2} < 0$$

$$\delta_2 = -2\alpha - 1 = -2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$$

$$\delta_3 = 2\alpha + 3 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 = -3 + 3 = 0$$

что соответствует критерию **неположительности** формы.

Иными словами, квадратичная форма $Q(x_1, x_2, x_3) = -\frac{3}{2}x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 \le 0$, причём, нулю она равна и при некоторых *ненулевых* значениях x_1, x_2, x_3.

Ответ: при $\alpha < -\frac{3}{2}$ форма определена отрицательно, при $\alpha = -\frac{3}{2}$ неположительно, в остальных случаях форма знакопеременна.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Исследовать квадратичные формы на знакоопределенность

а) $-3x_1^2 + 8x_1x_2 - 7x_2^2$

б) $9x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

:Пример 5

Исследовать квадратичные формы на знакоопределенность

а) $-3x_1^2+8x_1x_2-7x_2^2$

Решение: *используем критерий Сильвестра.*

а) запишем матрицу формы:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

и вычислим её угловые миноры:

$$\delta_1=-3<0$$

$$\delta_2=\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}=21-16=5>0$$

Ответ: *форма определена отрицательно*

б) $9x_1^2+4x_2^2-12x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$

б) запишем матрицу формы:

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

и вычислим её угловые миноры:

$$\delta_1=9>0$$

$$\delta_2=\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}=36-36=0$$

$$\delta_3=\begin{vmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}=2(24-8)+4(-36+12)=32-96=-64<0$$

Ответ: *форма знакопеременна*

Преобразование матрицы квадратичной формы

Пусть задана квадратичная форма F(x,x)=$X^T BX$. Рассмотрим линейное преобразование переменных $x_1 x_2,...,x_n$, полученных разложением элемента x в базисе {e}=($e_1 e_2,...,e_n$) при переходе к новому базису $\{e'\}$=($e_1', e_2',...,e_n'$) Между старымы x_i и новыми y_i где i=1,…n, координатами элемента x имеет место следующая зависимость.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & \cdots & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad X=TY,$$

где X и Y – столбцы старых и новых координат элемента X , T- матрица перехода от базиса {e} к $\{e'\}$

Если T- невырожденная , то существует обратное преобразование

$$Y=T^{-1}X$$

При линейном преобразовании квадратичная форма $X^T BX$ переходит в квадратичную форму $Y^T B'Y$ с матрицей

$$B' = T^T BT$$

Пример 6

Преобразовать квадратичную форму

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2$$

к новым переменным y_1, y_2,если

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$$

Решение

Эта замена в матричной записи имеет вид X=TY, где

$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица перехода от старых координат к новым

Матрица квадратичной формы

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ Тогда матрицу квадратичной формы в новом базисе (в новых координатах найдем из соотношения $B' = T^T BT$

$B' = T^T BT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ и квадратичная форма примет вид

$$F(y_1, y_2) = y_1^2 - 2y_1y_2 - 4y_2^2$$

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Пример 7

Преобразовать квадратичную форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

к новым переменным y_1, y_2, y_3, если

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Пример 7

Преобразовать квадратичную форму

$$F(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

к новым переменным y_1,y_2,y_3, если

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2 \\ x_2=y_1+y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

Решение

Эта замена в матричной записи имеет вид X=TY, где

$$T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - матрица перехода от старых координат к новым

Матрица квадратичной формы

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда матрицу квадратичной формы в новом базисе (в новых координатах) найдем из соотношения

$$B'=T^TBT=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$B'=T^TBT=$ и квадратичная форма примет вид

$$F(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3+6y_2y_3$$

Спасибо за внимание!