ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

по теориивероятностей

выполнил вариант10

Часть1. Случайныеобытия

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6

Часть 2. Случайные величины

2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8

Часть 3. Случайные векторы. Функция случайной величины

3.1.1	3.1.2	3.2	3.3

Часть 4. Математическая статистика

4.1	4.2

Часть 5. Случайные процессы

5.1	5.2	5.3	5.4	5.5

1 Случайные события

1.1 Задача 1 (вариант 10)

На полке находятся 12 сборников стихов. В 3-х из них содержится нужное ученику стихотворение. Ученик взял 4 книги. Найти вероятность того, что он : а) нашел нужное стихотворение; б) нужное стихотворение нашлось только в одной из взятых книг.

Сборники стихов	$N = 12$
Нужные сборники	$m = 3$
Выбранные сборники	$n = 4$

Найти вероятность того, что

1. среди выбранных сборников есть **хотя-бы один** нужный $(0 < k \leq m)$
2. среди выбранных сборников есть **только один** нужный $(k = 1)$

Решение

Основная формула: $P = \frac{C_m^k \cdot C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$

Найдем вероятность P_0 того, что среди выбранных сборников нет **ни одного** нужного $(k = 0)$:

$$P_0 = \frac{C_3^0 \cdot C_{12-3=9}^{4-0=4}}{C_{12}^4} = \frac{3!}{0!(3-0)!} \cdot \frac{9!}{4!(9-4)!} \cdot \frac{4!(12-4)!}{12!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 11} = \frac{14}{55} \approx 0.25$$

Тогда вероятность P_1 того, что среди выбранных сборников есть **хотя-бы один** нужный $(0 < k \leq m)$:

$$P_1 = \overline{P_0} = 1 - P_0 \approx 0.75$$

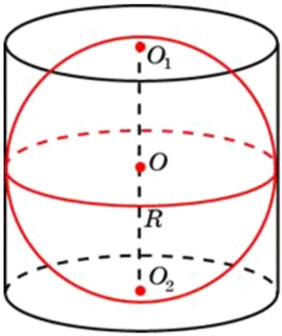
Найдем вероятность P_2 того, что среди выбранных сборников есть **только один** нужный $(k = 1)$:

$$P_2 = \frac{C_3^1 \cdot C_{12-3=9}^{4-1=3}}{C_{12}^4} = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \frac{9!}{3!(9-3)!} \cdot \frac{4!(12-4)!}{12!} = \frac{7 \cdot 4}{5 \cdot 11} = \frac{28}{55} \approx 0.5$$

Ответ

1. $P_1 \approx 0.75$
2. $P_2 \approx 0.5$

1.2 Задача 2 (вариант 10)



В прямой круговой цилиндр с радиусом основания R и высотой $2R$ наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка не попадет внутрь вписанного в цилиндр шара.

Решение

Вероятность P_0 того, что точка попадет во вписанный в цилиндр шар равна отношению объема шара к объему цилиндра:

$$P_0 = \frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{цилиндра}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2 \cdot 2R} = \frac{2}{3}$$

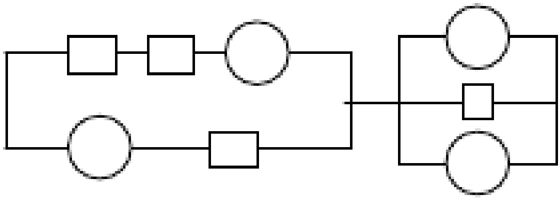
Следовательно, вероятность P того, что точка не попадет в указанный объем равна

$$P = 1 - P_0 = \frac{1}{3}$$

Ответ

$P = \frac{1}{3}$

1.3 Задача 3 (вариант 10)



Найти надежность схемы (вероятность ее работы за время t), если вероятности отказа $q_\circ = 0.1$ и $q_\square = 0.2$.

Решение

Вероятности работы:

1. отдельного элемента: $p = 1 - q$
2. элементов, соединенных последовательно: $p = p_1 p_2 ... p_n$
3. элементов, соединенных параллельно: $p = 1 - q_2 q_2 ... q_n$

Следовательно, вероятность работы данной схемы:

$$P = (1 - (1 - p_\square p_\square p_\circ)(1 - p_\circ p_\square)) \cdot (1 - q_\circ q_\square q_\circ) =$$

$$= (1 - (1 - 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.9)(1 - 0.9 \cdot 0.8)) \cdot (1 - 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.1) =$$

$$= (1 - (1 - 0.576)(1 - 0.72)) \cdot (1 - 0.002) =$$

$$= (1 - 0.424 \cdot 0.28) \cdot 0.998 =$$

$$= 0.88128 \cdot 0.998 \approx \mathbf{0.8795}$$

Ответ

$P = 0.8795$

1.4 Задача 4 (вариант 10)

Турнир по стрельбе между игроками 1 и 2 проходит следующим образом: первым стреляет игрок 1 и попадает в мишень с вероятностью $P_1 = 0.3$. Если 1 не попал, стреляет игрок 2, который может попасть с вероятностью $P_2 = 0.5$. Если 2 не попал, игрок 1 стреляет второй раз и т.д., но всего производится не более четырех выстрелов. После 1-го попадания турнир прекращается, выигрывает попавший игрок. Найти вероятность того, что: а) выиграет игрок 1; б) выиграет игрок 2.

Решение

Введем следующие события: A — выиграл игрок 1; B — выиграл игрок 2.
Также введем следующие гипотезы ($\sum P(H_i) = 1$):

1. H_1 — игрок 1 не попал ни один раз; $H_1 = (1 - P_1)^2 = 0.49$
2. H_2 — игрок 1 попал с первой попытки; $H_2 = P_1 = 0.3$
3. H_3 — игрок 1 попал со второй попытки; $H_3 = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21$

Вероятности событий в зависимости от гипотез:

1. $P(A/H_1) = 0$
   $P(B/H_1) = P_2 + (1 - P_2)P_2 = P_2(2 - P_2) = 0.5 \cdot 1.5 = 0.75$
2. $P(A/H_2) = 1$
   $P(B/H_2) = 0$
3. $P(A/H_3) = 1 - P_2 = 0.5$
   $P(B/H_3) = P_2 = 0.5$

Тогда вероятности победы каждого из игроков равны:

1. $P(A) = 0 \cdot 0.49 + 1 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.21 = 0 + 0.3 + 0.105 = 0.405$
2. $P(B) = 0.75 \cdot 0.49 + 0 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.21 = 0.3675 + 0 + 0.105 = 0.4725$

Ответ

1. $P(A) = 0.405$
2. $P(B) = 0.4725$

1.5 Задача 5 (вариант 10)

С первого завода на сборку поступило 500 лампочек, со второго – 1000 и с третьего — 1500. Вероятности выпуска бракованных лампочек этими заводами равны соответственно 0.03; 0.02 и 0.01. Найти вероятность того, что: a) взятая наугад лампочка окажется бракованной; b) бракованная лампочка произведена на первом заводе.

Решение

Введем событие A — выбрана бракованная лампочка.
Также введем следующие гипотезы ($\sum P(H_i) = 1$):

1. H_1 — выбрана лампочка с первого завода; $P(H_1) = \frac{500}{3000} = \frac{1}{6}$
2. H_2 — выбрана лампочка со второго завода; $P(H_2) = \frac{1000}{3000} = \frac{2}{6}$
3. H_3 — выбрана лампочка с третьего завода; $P(H_3) = \frac{1500}{3000} = \frac{3}{6}$

Вероятности события A в зависимости от гипотез:

1. $P(A/H_1) = 0.03$
2. $P(A/H_2) = 0.02$
3. $P(A/H_3) = 0.01$

Найдем вероятность того, что выбранная лампочка — бракованная:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A/H_i)P(H_i) =$$

$$= 0.03 \cdot \tfrac{1}{6} + 0.02 \cdot \tfrac{2}{6} + 0.01 \cdot \tfrac{3}{6} =$$

$$= 0.005 + 0.003 + 0.005 \approx \mathbf{0.013}$$

Найдем вероятность, что бракованная лампочка была выпущена на первом заводе:

$$P(H_1/A) = \tfrac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \tfrac{0.003}{0.013} = \mathbf{0.23}$$

Ответ

1. $P(A) = 0.013$
2. $P(H_1/A) = 0.23$

1.6 Задача 6 (вариант 10)

Проводится N повторных независимых испытаний. Событие А появляется в каждом из испытаний с вероятностью P. Найти вероятность того, что событие А:

1. не появится;
2. появится менее трех раз.

1.6.1 Подзадача a

N	P
1000	0.003

Будем использовать приближенную формулу Пуассона, так как количество испытаний большое, а вероятность события небольшая.

$$P_{n,k} \approx \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha},\ \alpha = np \leq 10$$

1. Событие ни разу не появится: $k = 0$

$$P(k = 0) = P_{1000,0} \approx \frac{3^0}{0!} e^{-3} = e^{-3} \approx \mathbf{0.05}$$

2. Событие появится менее трех раз: $0 \leq k < 3$

$$P(k < 3) = P_{1000,0} + P_{1000,1} + P_{1000,2} =$$

$$= 0.05 + e^{-3}(\frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!}) = 0.05 + 7.5 \cdot e^{-3} =$$

$$= 0.05 + 0.373 = \mathbf{0.873}$$

Ответ

1. $P(k = 0) = 0.05$
2. $P(k < 3) = 0.873$

1.6.2 Подзадача b

N	P
12	0.7

Так как количество опытов небольшое, а вероятность возникновения события A высокая, воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k},\ q = 1 - p$$

1. Событие ни разу не появится: $k = 0$

$$P(k=0) = P_{12,0} = C_{12}^0 p^0 q^{12} =$$

$$= \frac{12!}{0!(12-0)!} \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^{12} \approx \mathbf{0.0000005}$$

2. Событие появится менее трех раз: $0 \le k < 3$

   (a) $P(k<3) = P(k=0) + P(k=1) + P(k=2) =$
   (b) $= 0.0000005 + C_{12}^1 p^1 q^{11} + C_{12}^2 p^2 q^{10} =$
   (c) $= 0.0000005 + \frac{12!}{1! \cdot 11!} \cdot 0.7 \cdot 0.3^{11} + \frac{12!}{2! \cdot 10!} \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^{10} =$
   (d) $= 0.0000005 + 12 \cdot 0.7 \cdot 0.0000018 + 66 \cdot 0.49 \cdot 0.000006 =$
   (e) $= 0.0000005 + 0.00001512 + 0.00019404 \approx \mathbf{0.00021}$

Ответ

1. $P(k=0) = 0.0000005$

2. $P(k<3) = 0.00021$

1.6.3 Подзадача c

N	P
50	0.2

Большое количество экспериментов при достаточно большой вероятности появления события A — воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_0),\ x_0 = \frac{k-np}{\sqrt{npq}},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Событие ни разу не появится: $k = 0$

$$P(k=0) = \frac{1}{\sqrt{50 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\varphi(\frac{0-50 \cdot 0.2}{\sqrt{50 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\varphi(-\frac{10}{2\sqrt{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\varphi(-3.5) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\varphi(3.5) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{3.5^2}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}e^{-6.125} = \frac{0.002}{4\sqrt{\pi}} = \mathbf{0.000282}$$

2. Событие появится менее трех раз: $0 \le k < 3$

$$P(k<3) = P(0 \le k \le 2) = \Phi(\frac{2-10}{2\sqrt{2}}) - \Phi(\frac{-10}{2\sqrt{2}}) \approx$$

$$\approx \Phi(-2.82) - \Phi(-3.54) = -0.49760 + 0.49981 = \mathbf{0.00221}$$

Ответ

1. $P(k=0) = 0.000282$
2. $P(k<3) = 0.00221$

2 Случайные величины

2.1 Задача 1 (вариант 10)

На дне рождения Джейн тинейджеры затеяли любимую американскую игру: метание тортов в именинницу. Развлечение продолжается до первого попадания, т.к. Джейн, измазанная тортом, убегает переодеваться, а гости съедают оставшиеся торты. Вероятность попадания торта в именинницу при каждом броске равна $p = 0.6$. Найдите ряд распределения случайной величины ξ числа съеденных тортов, если родители Джейн заготовили к празднику $\mathrm{M} = 4$ тортов, постройте график функции распределения, найдите $M\xi$, $D\xi$.

Решение

Ряд распределения Построим ряд распределения ξ числа съеденных тортов. $0 \leq \xi \leq 3$, так как один из тортов в любом случае расходуется не по назначению.

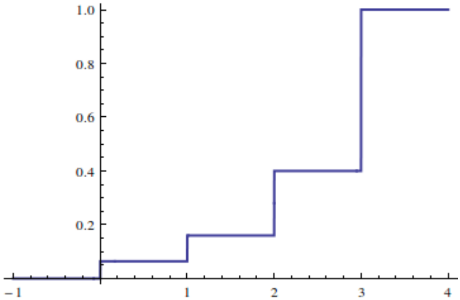
ξ	0	1	2	3
p	$0.6 \cdot 0.4^3 + 0.4^4 = 0.064$	$0.6 \cdot 0.4^2 = 0.096$	$0.6 \cdot 0.4 = 0.24$	0.6

Проверка: $\sum p_i = 0.064 + 0.096 + 0.24 + 0.6 = 1$ — верно

Тогда функция распределения дискретной случайной величины ξ будет запишется следующим образом:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.064, & 0 \leq x < 1 \\ 0.16, & 1 \leq x < 2 \\ 0.4, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

График функции распределения $F_\xi(x)$



Математическое ожидание $M\xi$ По ряду распределения найдем мат. ожидание величины ξ:

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_i p_i = 0.096 + 2 \cdot 0.24 + 3 \cdot 0.6 = \mathbf{2.376}$$

Дисперсия $D\xi$ Далее найдем дисперсию величины ξ:

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = 0.096 + 4 \cdot 0.24 + 9 \cdot 0.6 - 2.376^2 \approx \mathbf{0.81}$$

Ответ

1. $M\xi = 2.376$
2. $D\xi = 0.81$

2.2 Задача 2 (вариант 10)

Устройство сожержит некоторое количество одинаково надежных элементов, которые могут отказывать независимо друг от друга с одинаковой вероятностью. ξ — случайная величина — число отказавших элементов.

2.2.1 Подзадача A

Число элементов — $N_1 = 9$, вероятность отказа каждого элемента — $p_1 = 0.3$. Составить ряд распределения случайной величины ξ (в общем виде). Найти $M\xi$, $D\xi$. Какова вероятность того, что откажет более 2-х элементов?

Решение

Ряд распределения Так как элементы отказываютт с равной вероятностью независимо друг от друга, величина ξ подчиняется биномиальному распределению, которое в общем виде будет выглядеть так:

ξ	k
p	$C_n^k p^k q^{n-k} = C_9^k 0.3^k 0.7^{9-k}$

Математическое ожидание При биномиальном распределении мат. ожидание вычисляется по следующей формуле, где $n = N_1 = 9$ и $p = p_1 = 0.3$:

$$M\xi = np = 9 \cdot 0.3 = \mathbf{2.7}$$

Дисперсия Дисперсия вычисляется по следующей формуле, где $q = 1 - p = 0.7$:

$$D\xi = npq = M\xi \cdot q = 2.7 \cdot 0.7 = \mathbf{1.89}$$

Вероятность P выхода из строя > 2 элементов Найдем вероятность $P(\xi \leq 2)$ того, что из строя вышло 2 и меньше элементов:

$$P(\xi \leq 2) = P_{9,0} + P_{9,1} + P_{9,2} =$$

$$= C_9^0 \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^9 + C_9^1 \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^8 + C_9^2 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^7 =$$

$$= 0.7^7(\frac{9!}{0!9!} \cdot 0.7^2 + \frac{9!}{1!8!} \cdot 0.3 \cdot 0.7 + \frac{9!}{2!7!} \cdot 0.3^2) =$$

$$= 0.0823543(0.49 + 1.89 + 3.24) \approx 0.4628$$

Тогда искомая вероятность $P(\xi > 2)$ выхода из строя более 2 элементов будет равна:

$$P(\xi > 2) = 1 - P_1 = 1 - 0.4628 = \mathbf{0.5372}$$

Ответ

1. $M\xi = 2.7$
2. $D\xi = 1.89$
3. $P(\xi > 2) = 0.5372$

2.2.2 Подзадача Б

Число элементов $N_2 = 800$, вероятность отказа $p_2 = 0.02$. Найти $M\xi$, $D\xi$. Какова вероятность того, что откажет хотя бы один элемент?

Решение

Ряд распределения При большом количестве элементов и низкой вероятности отказа каждого элемента дискретная случайная величина ξ подчиняется распределению Пуассона:

ξ	k
p	$\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha} = \frac{16^k}{k!}e^{-16}$

Математическое ожидание В случае с распределением Пуассона, мат. ожидание равняется параметру $\alpha = np$:

$$M\xi = np = \alpha = 16$$

Дисперсия Дисперсия приблизительно равна мат. ожиданию, так как вероятность отказа элемента крайне мала:

$$D\xi = npq = \alpha q = 16 \cdot 0.98 = 15.68$$

Вероятность отказа хотя бы одного элемента Найдем вероятность $P(\xi = 0)$ того, что ни один элемент не откажет:

$$P(\xi = 0) = \frac{16^0}{0!}e^{-16} = e^{-16} \approx 0,000000113$$

Тогда вероятность $P(\xi > 0)$ отказа хотя бы одного элемента будет равна

$$P(\xi > 0) = 1 - P(\xi = 0) \approx \mathbf{0,999999887}$$

Ответ

1. $M\xi = 16$
2. $D\xi = 15.68$
3. $P(\xi > 0) = 0.999999887$

2.3 Задача 3 (вариант 10)

В урне находятся белые и черные шары. Из урны извлекается шар, фиксируется его цвет и шар возвращается в урну. Шар извлекается до первого появления события А (число извлечений неограниченно). Событие А — появление белого шара. В урне 15 белых и 5 черных шаров.

Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ – числа извлеченных шаров. Найти $M\xi$ и $D\xi$. Найти вероятность того, что извлекалось более четырех шаров.

Решение Вероятность наступления события A в единичном опыте равняется отношению количества белых шаров к общему количеству: $p = \frac{15}{20} = 0.75$. Так как шары после извлечения возвращаются обратно, данная вероятность остается постоянной.

Ряд распределения При неограниченном проведении опыта до наступления события A распределение дискретной случайной величины ξ является геометрическим:

ξ	1	2	3	...	k	...
p	0.75	$0.25 \cdot 0.75$	$0.25^2 \cdot 0.75$	...	$0.25^{k-1} \cdot 0.75$	...

Математическое ожидание и дисперсия При геометрическом распределении мат. ожидание $M\xi$ и дисперсия $D\xi$ расчитываются по следующим формулам:

$$M\xi = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3} \approx \mathbf{1.33}$$

$$D\xi = \frac{q}{p^2} = \frac{0.25}{0.75^2} = \frac{0.25}{0.5625} \approx \mathbf{0.44}$$

Вероятность извлечения более 4 шаров Найдем вероятность $P(\xi \leq 4)$ того, что извлечено 4 и меньше шаров:

$$P(\xi \leq 4) = 0.75(1 + 0.25 + 0.25^2 + 0.25^3) = 0.99609375$$

Тогда вероятность $P(\xi > 4)$ будет равна

$$P(\xi > 4) = 1 - P(\xi \leq 4) = 1 - 0.99609375 \approx \mathbf{0.0039}$$

2.4 Задача 4 (вариант 10)

Дана функция распределения непрерывной случайной величины $F(x)$. Найти плотность распределения $f(x)$, параметр А, вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал (α, β), математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ Ax^3, & x \in (0; 2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}; \; \alpha = 1; \; \beta = 2$$

Решение

Плотность распределения $f(x)$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 3Ax^2, & x \in (0; 2] \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Параметр A

$$3A \int_0^2 x^2 dx = Ax^3|_0^2 = 8A; \; 8A = 1; \; A = \frac{1}{8}$$

Вероятность попадания в интервал (α, β)

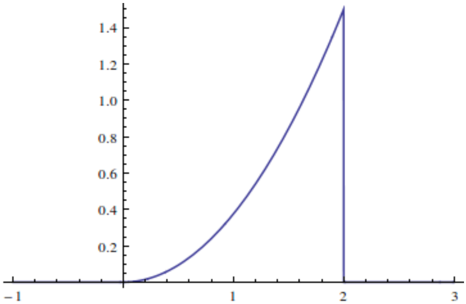
$$P(\xi \in [1; 2]) = \frac{1}{8} \int_1^2 x^3 dx = \frac{1}{32} x^4|_1^2 = \frac{1}{32}(16 - 1) = \frac{15}{32} = \mathbf{0.46875}$$

Математическое ожидание и дисперсия

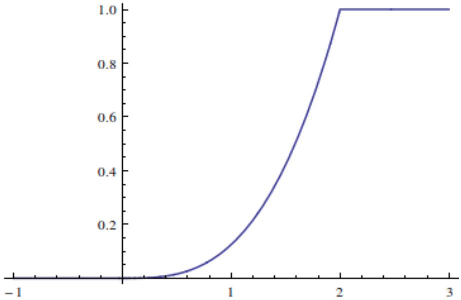
$$M\xi = \frac{1}{8} \int_0^2 x \cdot x^3 dx = \frac{1}{40} x^5|_0^2 = \frac{32}{40} = \mathbf{0.8}$$

$$D\xi = \frac{1}{8} \int_0^2 x^2 \cdot x^3 dx = \frac{1}{48} x^6|_0^2 = \frac{64}{48} \approx \mathbf{1.33}$$

Графики $f(x)$ и $F(x)$



$f(x)$



$F(x)$

Ответ

1. $A = \frac{1}{8}$
2. $P(\xi \in [1; 2]) = 0.46875$
3. $M\xi = 0.8$
4. $D\xi = 1.33$

2.5 Задача 5 (вариант 10)

Непрерывная случайная величина распределена равномерно на отрезке $[A, 9]$. Математическое ожидание равно $M = 4$. Найти параметр распределения A, функцию распределения, плотность распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения случайной величины. Найти дисперсию случайной величины и вероятность попадания в интервал $(-5, 7)$.

Решение

Параметр A

$$M\xi = \frac{a+b}{2}; \ \frac{A+9}{2} = 4; \ A = -\mathbf{1}$$

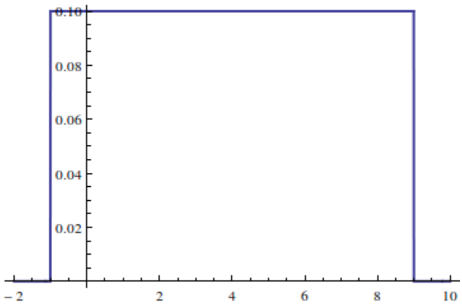
Плотность распределения $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = 0.1, & x \in [-1, 9] \\ 0, & x \notin [-1, 9] \end{cases}$$

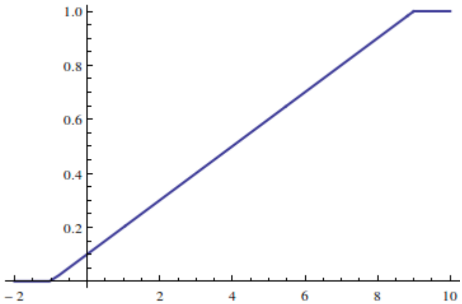
Функция распределения $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.1 \int_{-1}^{x} dx = 0.1(x+1), & x \in [-1, 9] \\ 1, & x > 9 \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ **и** $F(x)$



$f(x)$



$F(x)$

Дисперсия

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{100}{12} \approx \mathbf{8.33}$$

Вероятность попадания в интервал $(-5;7)$

$$P(\xi \in (-5;7)) = \frac{1}{10}\int_{-1}^{7} dx = \frac{x}{10}|_{-1}^{7} = \frac{8}{10} = \mathbf{0.8}$$

Ответ

1. $A = -1$
2. $D\xi = 8.33$
3. $P(\xi \in (-5;7)) = 0.8$

2.6 Задача 6 (вариант 10)

Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 10$. Найти плотность распределения случайной величины ξ, функцию распределения, построить графики этих функций. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ и вероятность того, что ξ принимает значения, меньшие своего математического ожидания.

Решение

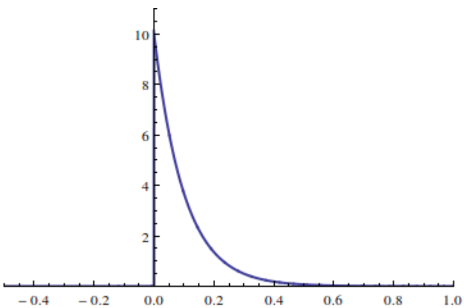
Плотность распределения $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} = 10e^{-10x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

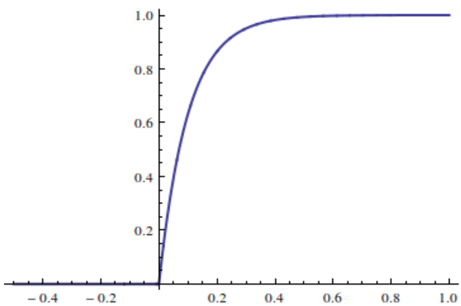
Функция распределения $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-10x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$



$f(x)$



$F(x)$

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение

$$M\xi = \frac{1}{\lambda} = \mathbf{0.1}$$

$$D\xi = \frac{1}{\lambda^2} = \mathbf{0.01}$$

$$\sigma\xi = \frac{1}{\lambda} = \mathbf{0.1}$$

Вероятность $P(\xi < M\xi)$

$$P(\xi < 0.1) = -\int_0^{0.1} e^{-10x} d(-10x) = -e^{-10x}|_0^{0.1} =$$

$$= -e^{-1} + 1 \approx -0.3679 + 1 = \mathbf{0.6321}$$

Ответ

1. $M\xi = 0.1$
2. $D\xi = 0.01$
3. $\sigma\xi = 0.1$
4. $P(\xi < M\xi) = 0.6321$

2.7 Задача 7 (вариант 10)

Измерительный прибор не имеет систематической ошибки ($m = 0$). Случайные ошибки распределены по нормальному закону, и с вероятностью 0.8 они не превосходят по абсолютной величине 12 мм. Найти среднюю квадратическую ошибку.

Решение

$$P(|\xi - m| < 12) \approx 2\Phi(\frac{12}{\sigma}) = 0.8$$

$$\Phi(\frac{12}{\sigma}) = 0.4$$

$$\frac{12}{\sigma} \approx 1.3$$

$$\sigma \approx \frac{12}{1.3} = \mathbf{9.23}$$

Ответ $\sigma = 9.23$

2.8 Задача 8 (вариант 10)

Проводится $N = 50$ повторных независимых испытаний. Событие A появляется в каждом из испытаний с вероятностью $p = 0.25$. Найти ве- роятность того, что событие A появится от $m_1 = 10$ до $m_2 = 20$ раз. Сколько нужно провести испытаний, чтобы вероятность отклонения относительной частоты появления события A от вероятности этого события менее чем на 0.1 по абсолютной величине, была равна 0.9?

Решение

$$P(10 \leq \xi \leq 20) = \Phi(\frac{20 - 50 \cdot 0.25}{\sqrt{50 \cdot 0.25 \cdot 0.75}}) - \Phi(\frac{10 - 50 \cdot 0.25}{\sqrt{50 \cdot 0.25 \cdot 0.75}}) =$$

$$= \Phi(2.45) - \Phi(-0.82) = 0.493 + 0.294 \approx \mathbf{0.787}$$

$$P(|\frac{m}{n} - p| \leq 0.1) \approx 2\Phi(0.1\sqrt{\frac{n}{pq}}) = 0.9$$

$$\Phi(0.1\sqrt{\frac{n}{pq}}) = 0.45;\ 0.1\sqrt{\frac{n}{pq}} = 1.65;\ \sqrt{\frac{n}{pq}} = 16.5;\ \frac{n}{pq} = 272.25$$

$$n = 272.25 \cdot np = 272.25 \cdot 50 \cdot 0.25 = 3403.125 \Longrightarrow n = \mathbf{3404}$$

Ответ

1. $P(10 \leq \xi \leq 20) = 0.787$

2. $n = 3404$

3 Случайные векторы. Функция случайной величины

3.1 Задача 1 (вариант 10)

3.1.1 Подзадача 1

Дано распределение двумерного случайного вектора (ξ, η) с дискретными компонентами.

$\xi \backslash \eta$	-2	1	2
-1	0.42	0.07	0.21
3	0.18	0.03	0.09

Требуется:

1. Найти одномерные распределения случайных величин ξ и η, их математические ожидания $M\xi$, $M\eta$ и дисперсии $D\xi$, $D\eta$.

2. Доказать независимость случайных величин ξ и η. Вычислить непосредственно их корреляционный момент $K_{\xi\eta}$.

Решение

Одномерные распределения ξ и η

ξ	-2	1	2
p	0.6	0.1	0.3

η	-1	3
p	0.7	0.3

Математические ожидания ξ и η

$$M\xi = -2 \cdot 0.6 + 0.1 + 2 \cdot 0.3 = -1.2 + 0.1 + 0.6 = \mathbf{-0.5}$$

$$M\eta = -0.7 + 3 \cdot 0.3 = \mathbf{0.2}$$

Дисперсии ξ и η

$$D\xi = 4 \cdot 0.6 + 0.1 + 4 \cdot 0.3 - 0.25 = \mathbf{3.45}$$

$$D\eta = 0.7 + 9 \cdot 0.3 - 0.04 = \mathbf{3.36}$$

Независимость ξ и η

ξ_i	η_j	$P(\xi = \xi_i) \cdot P(\eta = \eta_j)$	p_{ij}	$\xi_i \eta_j$
-2	-1	0.42	0.42	2
-2	3	0.18	0.18	-6
1	-1	0.07	0.07	-1
1	3	0.03	0.03	3
2	-1	0.21	0.21	-2
2	3	0.09	0.09	6

Так как выполняется условие $p_{ij} = P(\xi = \xi_i) \cdot P(\eta = \eta_j)\ \forall i, j$, случайные величины **независимы**.

Корелляционный момент $K_{\xi\eta}$

$\xi\eta$	-6	-2	-1	2	3	6
p	0.18	0.21	0.07	0.42	0.03	0.09

$$M(\xi\eta) = -6 \cdot 0.18 - 2 \cdot 0.21 - 0.07 + 2 \cdot 0.42 + 3 \cdot 0.03 + 6 \cdot 0.09 = -0.1$$

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta = -0.1 + 0.5 \cdot 0.2 = \mathbf{0}$$

Ответ

1. $M\xi = -0.5$; $M\eta = 0.2$
2. $D\xi = 3.45$; $D\eta = 3.36$
3. $K_{\xi\eta} = 0$

3.1.2 Подзадача 2

Вычислить математическое ожидание $M\theta$ и дисперсию $D\theta$ случайной величины θ двумя способами: на основании свойств математического ожидания и дисперсии и непосредственно — по ряду распределения θ.

$\theta = -20\xi + 10\eta$, где ξ, η — дискретные случайные величины.

$\xi \backslash \eta$	-2	1	2
-1	0.42	0.07	0.21
3	0.18	0.03	0.09

Решение

Ряд распределения θ

θ	30	70	-30	10	-50	-10
p	0.42	0.18	0.07	0.03	0.21	0.09

θ	-50	-30	-10	10	30	70
p	0.21	0.07	0.09	0.03	0.42	0.18

Математическое ожидание и дисперсия (по свойствам)

$$M\xi = -0.5;\ M\eta = 0.2;\ D\xi = 3.45;\ D\eta = 3.36$$

$$M\theta = M(-20\xi + 10\eta) = -20M\xi + 10M\eta = 10 + 2 = \mathbf{12}$$

$$D\theta = D(-20\xi + 10\eta) = 400D\xi + 100D\eta = 400 \cdot 3.45 + 100 \cdot 3.36 = \mathbf{1716}$$

Математическое ожидание и дисперсия (по ряду распределения)

$$M\theta = -50 \cdot 0.21 - 30 \cdot 0.07 - 10 \cdot 0.09 + 10 \cdot 0.03 + 30 \cdot 0.42 + 70 \cdot 0.18 = \mathbf{12}$$

$$D\theta = 2500 \cdot 0.21 + 900 \cdot (0.07 + 0.42) + 100(0.09 + 0.03) + 4900 \cdot 0.18 - 12^2 = \mathbf{1716}$$

3.2 Задача 2 (вариант 10)

Дана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 5e^{-5x}, & x \geq 0 \end{cases}$. Найти плотность распределения непрерывной случайной величины $\eta = \varphi(\xi) = |2 - \xi|$ и ее математическое ожидание M_η.

Решение

$$y = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$$

1. Для $x \leq 2$: $y = 2 - x$; $\varphi^{-1}(y) = 2 - y$

$$F_{\eta 1}(y) = 5 \int_{2-y}^{+\infty} e^{-5x} dx = -e^{-5x}|_{2-y}^{+\infty} = e^{5y-10} = \begin{cases} e^{5y-10}, & y \leq 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

$$f_{\eta 1}(y) = \begin{cases} 5e^{5y-10}, & y \leq 2 \\ 0, & y > 2 \end{cases}$$

2. Для $x > 2$: $y = x - 2$; $\varphi^{-1}(y) = y + 2$

$$F_{\eta 2}(y) = 5 \int_{-\infty}^{y+2} e^{-5x} dx = -e^{-5x}|_{-\infty}^{y+2} = -e^{-5y-10} = \begin{cases} 0, & y < -2 \\ -e^{-5y-10}, & y \geq -2 \end{cases}$$

$$f_{\eta 2}(y) = \begin{cases} 0, & y < -2 \\ 5e^{-5y-10}, & y \geq -2 \end{cases}$$

3. Для всех x:

$$f_\eta(y) = \frac{f_{\eta 1}(y) + f_{\eta 2}(y)}{2} = \begin{cases} 2.5e^{-10}(e^{-5y} + e^{5y}), & y \in [-2; 2] \\ 0, & y \notin [-2; 2] \end{cases}$$

- $\int e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}e^{-5x}$
- $\int xe^{-5x}dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-5x}dx & v = -\frac{1}{5}e^{-5x} \end{vmatrix} = -\frac{x}{5}e^{-5x} + \frac{1}{5}\int e^{-5x}dx = -\frac{5x+1}{25}e^{-5x}$

$$M_\eta = \int_0^\infty |2-x| \cdot 5e^{-5x}dx = 5\int_0^2 (2-x)e^{-5x}dx + 5\int_2^\infty (x-2)e^{-5x}dx =$$

$$= 10\int_0^2 e^{-5x} - 5\int_0^2 xe^{-5x}dx + 5\int_2^\infty xe^{-5x}dx - 10\int_2^\infty e^{-5x}dx =$$

$$= -2e^{-10} + 2 + \frac{11}{5}e^{-10} - \frac{1}{5} + \frac{11}{5}e^{-10} - 2e^{-10} =$$

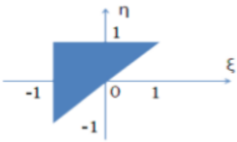
$$= (-4 + \frac{22}{5})e^{-10} + \frac{9}{5} = \mathbf{\frac{2+9e^{10}}{5e^{10}}}$$

Ответ

1. $f_\eta(y) = \begin{cases} 2.5e^{-10}(e^{-5y} + e^{5y}), & y \in [-2;2] \\ 0, & y \notin [-2;2] \end{cases}$
2. $M_\eta = \frac{2+9e^{10}}{5e^{10}}$

3.3 Задача 3 (вариант 10)

Случайный вектор (ξ, η) распределен равномерно в области G, изображенной на рисунке.



1. Найти плотность распределения вероятностей компонент случайного вектора и решить вопрос об их зависимости.
2. Выяснить, коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η).
3. Найти $P\{(\xi, \eta) \in D\}$, где $D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Решение

$$D : \begin{cases} -1 \leq \xi \leq \eta \\ \xi \leq \eta \leq 1 \end{cases}$$

Плотность распределения ξ и η

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2}, & y \in [-1, 1] \\ 0, & y \notin [1, 1] \end{cases}$$

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, y],\, y \in [x, 1] \\ 0, & x \notin [-1, y],\, y \notin [x, 1] \end{cases}$$

Проверка зависимости

$$f_\xi(x) \cdot f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [-1, 1],\, y \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1],\, y \notin [-1, 1] \end{cases} \neq f_{\xi\eta}(x, y) \Rightarrow \textbf{зависимы}$$

Кореляция

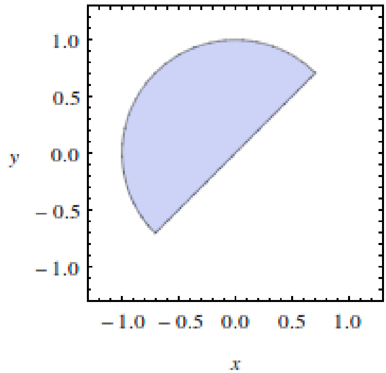
$$M_\xi = \frac{a+b}{2} = 0;\ M_\eta = 0$$

$$k_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f_{\xi\eta}(x,y)dxdy - M_\xi \cdot M_\eta =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y} \frac{1}{4}xy\,dx\,dy = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}(y^3 - y)\,dy =$$

$$= (\frac{1}{32}y^4 - \frac{1}{16}y^2)|_{-1}^{1} = 0 \Rightarrow \textbf{не кореллированы}$$

Вероятность попадания в область D



$$P\{(\xi,\eta) \in D\} = \iint_D f_{\xi\eta}(x,y)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\rho^2}{2}|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx \mathbf{0.785}$$

4 —

5 Случайные процессы

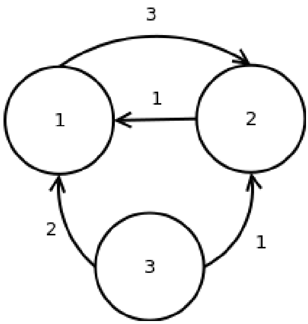
5.1 Задача 1 (вариант 10)

Система имеет три состояния. Построить граф состояний системы, написать уравнения Колмогорова и найти стационарное распределение. λ_{ij} — плотности перехода.

λ_{12}	λ_{13}	λ_{21}	λ_{23}	λ_{31}	λ_{32}
3	0	1	0	2	1

Решение

Граф состояний системы



Уравнения Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial t} = -3p_1 + p_2 + 2p_3 \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} = 3p_1 - p_2 + p_3 \\ \frac{\partial p_3}{\partial t} = -3p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} ; \begin{cases} -3p_1 + p_2 + 2p_3 = 0 \\ 3p_1 - p_2 + p_3 = 0 \\ -3p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3p_1 + p_2 = 0 \\ p_1 + p_2 = 1 \\ p_3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} -3p_1 - p_1 + 1 = 0 \\ p_2 = -p_1 + 1 \\ p_3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} p_1 = \frac{1}{4} \\ p_2 = \frac{3}{4} \\ p_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ

1. $\overline{P}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$

5.2 Задача 2 (вариант 10)

Дана корреляционная функция и математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$. Найти корреляционную функцию, математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $\eta(t)$.

$$K_\xi(t_1, t_2) = t_1^3 t_2^3 + \cos 3t_1 \cos 3t_2;\ M_\xi(t) = e^t;\ \eta(t) = \frac{d\xi}{dt} + \sin 5t$$

Решение

$$M_\eta(t) = (e^t)' + \sin 5t = \underline{e^t + \sin 5t}$$

$$K_\eta(t_1, t_2) = ((t_1^3 t_2^3 + \cos 3t_1 \cos 3t_2)'_{t_1})'_{t_2} =$$

$$= (3t_1^2 t_2^3 - 3 \sin 3t_1 \cos 3t_2)'_{t_2} = \underline{9t_1^2 t_2^2 + 9 \sin 3t_1 \sin 3t_2}$$

$$D_\eta(t) = K_\eta(t, t) = \underline{9t^4 + 9 \sin^2 3t}$$

Ответ

1. $M_\eta(t) = e^t + \sin 5t$
2. $K_\eta(t_1, t_2) = 9t_1^2 t_2^2 + 9 \sin 3t_1 \sin 3t_2$
3. $D_\eta(t) = 9t^4 + 9 \sin^2 3t$

5.3 Задача 3 (вариант 10)

Найти корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $\xi(t)$, если он задан каноническим разложением. Дисперсии случайных величин $D\xi_i = D_i$.

$\xi(t)$	D_1	D_2	D_3
$\xi_1 + \xi_2 t e^{2t} + 3i\xi_3 \cos t$	3	1	2

Решение

$$K_\xi(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i(t_i)\overline{\varphi_i(t_2)} D_i = \underline{3 + t_1 t_2 e^{2t_1} e^{2t_2} + 9\cos t_1 \cos t_2}$$

$$D_\xi(t) = K_\xi(t, t) = \underline{3 + t^2 e^{4t} + 9\cos^2 t}$$

Ответ

1. $K_\xi(t_1, t_2) = 3 + t_1 t_2 e^{2t_1} e^{2t_2} + 9\cos t_1 \cos t_2$
2. $D_\xi(t) = 3 + t^2 e^{4t} + 9\cos^2 t$