1. Сходимость и расходимость ряда

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность чисел

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Определение 1.1. *Выражение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1.1)$$

называется числовым рядом, а сами числа $a_1, a_2, ...$ *– членами ряда. Сумма n первых членов ряда называется n-й частичной суммой ряда и обозначается* S_n*:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n .$$

Определение 1.2. *Если существует предел* S *бесконечной последовательности чисел* $S_1, S_2, ..., S_n, ...$*, т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$*, то этот предел называют суммой ряда* (1.1)*, а сам ряд* (1.1) *в этом случае называется сходящимся. Если же предел* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *не существует, то ряд* (1.1) *называют расходящимся. Расходящийся ряд суммы не имеет.*

Однако, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, то иногда говорят, что ряд (1.1) имеет бесконечную сумму.

Пусть ряд (1.1) сходится. Тогда его частичная сумма S_n является приближённым значением для суммы S. Погрешность этого приближения

$$R_n = S - S_n$$

называется остатком ряда. Этот остаток является суммой ряда:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$$

Ясно, что, если ряд (1.1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Пример 1.1. Бесконечная геометрическая прогрессия

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \quad (a \neq 0)$$

является сходящимся числовым рядом, если $|q| < 1$. Сумма ряда равна в этом случае

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Теорема 1.1. (Необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд* (1.1) *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Имеем очевидное соотношение $a_n = S_n - S_{n-1}$. Пусть ряд (1.1) сходится, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Необходимый признак позволяет отсеивать часть расходящихся рядов.

Теорема 1.2. (Достаточный признак расходимости). *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, то ряд расходится*.

Доказательство. Пусть ряд сходится. Тогда по необходимому признаку сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ Противоречие с $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Пример 1.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2n-1}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2} \neq 0$

Пример 1.3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ расходится, так как $a_n \to e \neq 0$.

Пример 1.4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$ расходится. В самом деле, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = 1$, то необходимое условие сходимости ряда не выполняется.

Пример 1.5. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

Необходимое условие сходимости ряда выполняется, ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример 1.6. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{100}\right)^2 \neq 0.$$

Следовательно, ряд расходится.

Теорема 1.3. (Критерий Коши сходимости ряда). *Для того чтобы ряд* (1.1) *сходился необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* N*, что для всех* $n > N$ *и всех* $p \geq 0$ *выполнялось неравенство*

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon.$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы Коши о сходимости фундаментальной последовательности

Пример 1.6. Рассмотрим *гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Имеем

$$| S_{n+p} - S_n | =$$

$$= \left|\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+p}+\ldots\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{n+1}+\ldots\frac{1}{n+p}\right| > \left|\frac{1}{n+p}+\ldots\frac{1}{n+p}\right| = \frac{p}{n+p}$$

Поскольку для $p = n$ и $\varepsilon = \frac{1}{2}$ получаем, что $\left|S_{n+p} - S_n\right| > \varepsilon$, то гармонический ряд расходится.

Задачи для самостоятельного решения

Для ряда $a_1 + a_2 + \ldots,$ определить его общий член a_n и записать ряд в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1) $\frac{1}{3}-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3\cdot 3}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3^4\cdot 4}+\ldots$. 2) $\frac{1}{10}-\frac{2}{100}+\frac{6}{1000}-\frac{24}{10000}+\ldots$.

3) $\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3\cdot 4}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4\cdot 5}}-\frac{1}{\sqrt{4\cdot 5\cdot 6}}+\ldots$. 4) $\frac{6}{2!}+\frac{7}{4!}+\frac{8}{6!}+\frac{9}{8!}+\ldots$.

5) $\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1}-\frac{\sin\frac{2\pi}{9}}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{27}}{3}-\frac{\sin\frac{4\pi}{81}}{4}+\ldots$. 6) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 3}+\frac{6}{\ln 4}+\frac{24}{\ln 5}+\ldots$.

Выполняется ли необходимый признак сходимости ряда?

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$. 2) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{2n-1}{2n}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,arctg\frac{1}{n}$.

5) $\frac{2}{1}+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3}$. 6) $3+\frac{3\cdot 4}{1\cdot 3}+\frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots$.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}+3^n}{7^{n+1}}$.

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-4}{2^{3n-1}}$. 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{n}{n^2+1}\right)$. 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$. 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\left(\frac{1+(-1)^n}{2}n\right)}{n^3+2}$

1.1 Свойства сходящихся рядов

Теорема 1.4. *Члены сходящегося ряда можно умножить на одно и то же число k. Полученный ряд будет сходиться, а сумма его будет в k раз больше суммы исходного ряда.*

Доказательство. Рассмотрим два ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

и

$$ka_1 + ka_2 + ka_3 + \ldots + ka_n + \ldots.$$

Положим $S_n^1 = a_1 + \ldots + a_n$ и $S_n^2 = ka_1 + \ldots + ka_n$. Тогда $S_n^2 = kS_n^1$. По теореме о предельном переходе в равенстве:

$$S_2 = \lim_{n\to\infty} S_n^2 = \lim_{n\to\infty} kS_n^1 = k\lim_{n\to\infty} S_n^1 = kS_1.$$

Теорема 1.5. *Члены сходящегося ряда можно группировать. Полученный ряд будет сходиться, и сумма его не изменится.*

Доказательство. Сгруппируем члены ряда, например, так

$$b_1 = a_1 + .. + a_k, b_2 = a_{k+1} + \ldots + a_l, \ldots b_n = a_s + \ldots + a_p \ldots.$$

Ясно, что частичные суммы группированного ряда представляют собой подпоследовательность последовательности частичных сумм исходного ряда. Так как последовательность сходится, то и подпоследовательность сходится к тому же пределу.

Теорема 1.6. *В сходящемся ряде можно отбросить конечное число первых членов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(a_1 + \ldots + a_k = B)$. Полученный ряд будет сходиться, а его сумма будет меньше суммы исходного ряда на величину B.*

Доказательство. Рассмотрим два ряда:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

и

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+n}+\ldots.$$

Запишем частичные суммы второго ряда

$$S_2^1=a_{k+1}=S_{1\,k+1}-B,\ldots,S_n^2=a_{k+1}+\ldots+a_{k+n}=S_{k+n}^1-B.$$

По теореме о предельном переходе в равенстве:

$$S_2=\lim_{n\to\infty}S_n^2=\lim_{n\to\infty}S_n^1-B=S_1-B.$$

Теорема 1.7. *Сходящиеся ряды можно почленно складывать* (*или вычитать*)*, получая сходящийся ряд с суммой, равной сумме* (*или разности*) *сумм исходных рядов.*

Доказательство. Рассмотрим два сходящихся ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$, где $c_n=a_n\pm b_n$. $S_n^c=S_n^a\pm S_n^b$. Переходя к пределу в последнем равенстве, получим

$$S_c=\lim_{n\to\infty}S_n^c=\lim_{n\to\infty}\left(S_n^a\pm S_n^b\right)=\lim_{n\to\infty}S_n^a\pm\lim_{n\to\infty}S_n^b=S_a\pm S_b.$$

Пример 1.7. Ряд $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\ldots$расходится. Он представляет собой сумму двух рядов: сходящейся геометрической прогрессии (нечетные члены) и гармонического ряда (четные члены). Если бы этот ряд сходился, то, после вычитания из него почленно сходящегося ряда $1+0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\ldots$, должен был бы по свойству 4 получится сходящийся ряд, вопреки тому, что в результате такого вычитания получается расходящийся гармонический ряд. Следовательно, исходный ряд расходится.

Пример 1.8. Ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$ сходится. Рассмотрим сходящийся ряд $1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)+\ldots=1$. Группируем его члены

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots$$

Получаем исходный ряд. Следовательно, он сходится, и его сумма равна 1.

Замечание 1.1. Ряд

$$1-\frac{1}{2}+1-\frac{5}{6}+\ldots+1-\frac{n(n+1)-1}{n(n+1)}+\ldots$$

может быть представлен в виде:

$$1-\frac{1}{2}+1-\frac{5}{6}+\ldots+1-\frac{n(n+1)-1}{n(n+1)}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{5}{6}\right)+\ldots+\left(1-\frac{n(n+1)-1}{n(n+1)}\right)+\ldots=$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$$

который сходится, как было показано в предыдущем примере. Тем не менее, исходный ряд не сходится, ибо для него не выполнено необходимое условие сходимости (теорема 1.1).

Пример 1.9. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}$. Вначале разложим знаменатель общего члена ряда на множители, используя корни квадратного уравнения:

$$U_n=\frac{1}{9n^2-3n-2}=\frac{1}{9\left(n-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(n+\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}.$$

Давая n последовательно значения 1, 2, 3, ..., получим

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Для нахождения суммы ряда надо найти предел при $n\to\infty$ n-й частичной суммы

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Для того чтобы придать S_n более удобный вид для перехода к пределу, заменим дробь суммой простейших дробей:

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим

$$1 = A\cdot(3n+1) + B\cdot(3n-2).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, получим

$$\begin{array}{c|l} n & 0 = 3A + 3B, \quad A = -B \\ n^0 & 1 = A - 2B, \quad 1 = -3B, \quad B = -\dfrac{1}{3}, \quad A = \dfrac{1}{3}; \end{array}$$

поэтому

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3\cdot(3n-2)} - \frac{1}{3\cdot(3n+1)}.$$

Полагая здесь последовательно $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим

$$\frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{4\cdot 7} = \frac{1}{12} - \frac{1}{21}, \quad \frac{1}{7\cdot 10} = \frac{1}{21} - \frac{1}{30},$$

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3(3n-2)} - \frac{1}{3(3n+1)},$$

следовательно,

$$S_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{30}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3(3n-2)} - \frac{1}{3(3n+1)}\right).$$

Очевидно, что в этой сумме все слагаемые попарно уничтожаются, кроме первого и последнего, поэтому

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3n+1)},$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3(3n+1)}\right) = \frac{1}{3}$, т. е. ряд сходится, и его сумма равна $\frac{1}{3}$.

2. Знакоположительные ряды

Определение 2.1. *Числовой ряд называется знакоположительным, если все его члены – положительные* (*неотрицательные*) *числа.*

Основное свойство знакоположительных рядов заключается в том, что частичные суммы такого ряда представляют собой неубывающую последовательность.

$$S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}, \text{ поскольку } a_n \geq 0.$$

Поэтому достаточно проверить, что последовательность частичных сумм ограничена сверху, чтобы по теореме Вейерштрасса утверждать, что последовательность частичных сумм имеет конечный предел, т.е. ряд сходится.

На этом основаны, практически, все признаки сходимости рядов.

Ряд может сравниваться с несобственным интегралом (интегральный признак Коши), с другими рядами (признаки сравнения рядов), в частности, со сходящейся геометрической прогрессией (признак Даламбера, радикальный признак Коши).

Пока в библиотеке рядов, которые можно использовать для сравнения, всего два ряда: сходящийся ряд – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, известная еще из школы, и расходящийся гармонический ряд, полученный по критерию Коши.

Заметим, что критерий Коши (как критерий сходимости), вообще, самый сильный инструмент при исследовании сходимости ряда, но его область применимости узка.

2.1. Интегральный признак Коши

Интегральный признак Коши, основанный на сравнении с несобственным интегралом – очень сильный признак. В самом деле, если аппроксимировать непрерывную подынтегральную функцию кусочно-постоянной, то площадь под графиком функции (интеграл) и площадь под графиком кусочно-постоянной функции будут различаться на конечное число.

Теорема 2.1. (Интегральный признак Коши). *Пусть при* $x \ge 1$ *определена непрерывная, не возрастающая функция* $f(x)$*, такая, что* $f(n) = a_n$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится в том и только в том случае, когда сходится несобственный интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

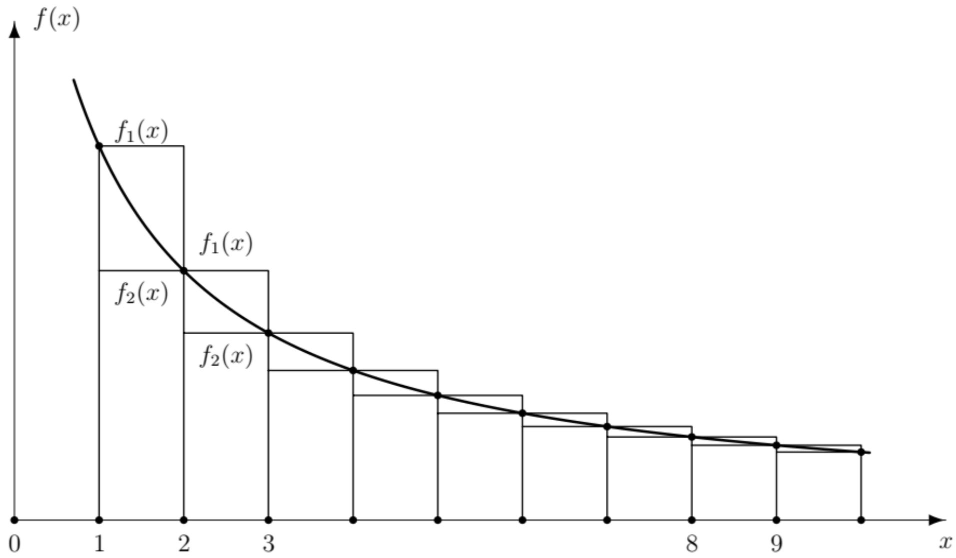


Рис. 2.1

Доказательство. Построим график функции $f(x)$ (см. рис. 2.1). Интеграл $\int\limits_1^n f(x)dx$ – это площадь под графиком функции $f(x)$ при $1 \le x \le n$. Из точек этого графика, соответствующих абсциссам 1, 2, 3, 4, ... проведем горизонтальные линии длиной 1. Площадь $S(f)$ части плоскости, расположенной между графиком функции $f(x)$ и осью абсцисс меньше площади S_1 части плоскости, расположенной между графиком ступенчатой функции $f_1(x)$, принимающей значения $f(1) = a_1$ при $1 \le x < 2$, $f(2) = a_2$ при $2 \le x < 3$ и так далее, и осью абсцисс. График этой ступенчатой функции на рисунке изображен тонкой линией.

Площадь $S(f)$ больше площади S_2 части плоскости, расположенной между графиком ступенчатой функции $f_2(x)$, принимающей значения $f(2)=a_2$ при $1 \le x < 2$, $f(3)=a_3$ при $2 \le x < 3$ и так далее.

Достаточность. Если интеграл сходится, то

$$S_n \le a_1 + \int_1^n f(x)dx < a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Поэтому последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху. Так как эта последовательность не убывает, то по теореме Вейерштрасса существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Необходимость. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, а по необходимому признаку сходимости ряда $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Поэтому последовательность $\left\{\int_1^n f(x)dx\right\}$ (неубывающая, так как $f(x) \ge 0$) ограничена сверху. Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx$, т.е. несобственный интеграл сходится.

Если ряд расходится, то и интеграл расходится и наоборот. Это легко доказывается от противного.

Поэтому говорят, что несобственный интеграл и ряд *сходятся или расходятся* «*одновременно*», т.е. один из них сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится. Это понятие часто употребляют при сравнении рядов.

Пример 2.1. Рассмотрим «*ряды Дирихле*» $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. Название взято в кавычки, так неизвестно, рассматривал ли эти ряды Дирихле, но оно устоялось за долгие годы. Имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} b^{1-p} - 1 \quad (p \ne 1).$$

Ясно, что интеграл сходится при $p>1$ и расходится при $p<1$. Случай $p=1$ рассмотрен выше (расходящийся гармонический ряд). Отсюда следует вывод: ряд Дирихре $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Интересно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^q n}$ сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$.

Пример 2.2. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится, поскольку

$$\int_2^n \frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln n-\ln\ln 2\to\infty \text{ при } n\to\infty.$$

Пример 2.3. Ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$ также расходятся, поскольку

$$\int_3^n \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\ln\ln\ln n-\ln\ln\ln 3\to\infty \text{ при } n\to\infty.$$

Пример 2.4. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ сходится, поскольку

$$\int_2^n \frac{dx}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^n<\infty.$$

Пример 2.5. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$. Поскольку

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}=-2\lim_{n\to\infty}\int_1^n e^{-\sqrt{x}}d(-\sqrt{x})=-2\lim_{n\to\infty}e^{-\sqrt{x}}\bigg|_1^n=$$

$$=-2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}-\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e},$$

ряд сходится.

Пример 2.6. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$. Поскольку

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < \infty,$$

ряд сходится.

Теперь становится яснее, где пролегает граница между сходящимися и расходящимися рядами. Заодно накоплена библиотека сходящихся и расходящихся рядов, которые можно использовать как эталонные при сравнении рядов. Сравнивать ряды можно с помощью признаков сравнения.

2.2. Признаки сравнения рядов

Теорема 2.2. (Первый признак сравнения рядов). *Пусть для всякого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* $a_n \le b_n$, *тогда из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *а из расходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Замечание 2.1. В силу свойства сходящихся рядов, конечное число членов ряда не влияет на сходимость и неравенство $a_n \le b_n$ можно проверять «*начиная с некоторого n*». Поэтому эту фразу часто можно встретить в теоремах о рядах. Иногда ее просто опускают, но ее всегда надо иметь в виду.

Доказательство. 1) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда для всякого n выполнено неравенство $S_n^a \le S_n^b \le S_b$. Поэтому последовательность частичных сумм $\left\{S_n^a\right\}$ ограничена сверху числом S_b. Но эта последовательность не убывает. Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует предел

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{a\,n} = S_a \le S_b$. Последнее неравенство справедливо в силу теоремы о предельном переходе в неравенстве.

2) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по п.1 доказательства и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Противоречие. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

Пример 2.7. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ расходится, так как $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (гармонический) расходится.

Теорема 2.3. *Если, хотя бы начиная с некоторого места (например, для* $n > N$*), выполняется неравенство:* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$*, где* $a_n > 0,\ b_n > 0$*, то из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, а из расходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что неравенство в условии теоремы справедливо для всех значений $n = 1, 2, 3, \ldots$ В таком случае имеет место:

$$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим:

$$\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1} \Rightarrow a_n \le \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда вместе с ним сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$, полученный умножением его членов на постоянный множитель $\frac{a_1}{b_1}$, а значит, по первому признаку сравнения, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и т. д.

Пример 2.8. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$. Положим $a_n = \frac{n!}{2^n}$, $b_n = 1$. Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{n+1}{2},$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{1} = 1.$$

Поскольку $\frac{n+1}{2} \geq 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то, по предыдущей теореме, расходится и рассматриваемый ряд.

Теорема 2.4. (Второй признак сравнения). *Пусть* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \neq 0$. *Тогда ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся «одновременно», т.е. один из них сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится.*

Доказательство. Раскроем определение предела.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n > N \left| \frac{a_n}{b_n} - C \right| < \varepsilon.$$

$$C - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < C + \varepsilon, \qquad b_n(C - \varepsilon) < a_n < b_n(C + \varepsilon).$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то по 1 признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (C-\varepsilon)$ сходится $(C-\varepsilon>0,\ \textit{так как } \varepsilon \textit{ мало})$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится (свойство сходящихся рядов).

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (C+\varepsilon)$ сходится (свойство сходящихся рядов), тогда по 1 признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по предыдущему ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (противоречие).

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то по предыдущему ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится (противоречие).

Пример 2.9. Ряд с $a_n = \dfrac{n^2+4n-2}{n^3+n-5}$ расходится по второму признаку сравнения (ряд сравнения – гармонический ряд).

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n^2}(n+1)}{n\operatorname{arctg} n}$ сходится, $\sin\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}(n\to\infty)$, $\operatorname{arctg} n$ – ограничена. Ряд сравнения $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ – сходящийся ряд Дирихле.

Пример 2.10. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$ сходится, ибо

$$\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ – сходящийся.

Пример 2.11. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{n+2}$ расходится поскольку $\mathrm{tg}\frac{\pi}{n+2}>\frac{1}{n}$, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходящийся.

Пример 2.12. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится. В самом деле, при $n\to\infty$ бесконечно малая величина $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ эквивалентна $\frac{1}{n}$, поэтому, беря для сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1>0\,.$$

Взятый для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=}\frac{1}{n}$ – расходится, следовательно, и данный ряд расходится.

Пример 2.13. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ расходится. Действительно, при $n\to\infty$ бесконечно малая величина $\sin\frac{\pi}{3^n}$ эквивалентна $\frac{\pi}{3^n}$, поэтому, беря для сравнения геометрическую прогрессию $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot\frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\pi>0\,.$$

Взятый для сравнения ряд сходится (он имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$, где $q=\frac{2}{3}<1$), следовательно, и данный ряд сходится.

Пример 2.14. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^3}{n^4+3n^2+2}$ расходится. Для доказательства рассмотрим ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_k(n)}{Q_l(n)}$, где $P_k(n)$ – многочлен от n степени k, а $Q_l(n)$ – многочлен от n степени l. Вопрос о сходимости рядов такого вида полностью исчерпывается сравнением с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где $p=l-k$. В рассматриваемом случае в числителе многочлен степени $k=3$, степень знаменателя $l=4$. Сравниваем данный ряд с гармоническим рядом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)^3}{n^4+3n^2+2}\Big/\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3\cdot n}{n^4+3n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}{1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}=1>0\,;$$

так как гармонический ряд расходится, то расходится и данный ряд.

Теорема 2.5. (Признак Даламбера – конечная форма). *Если* $\forall n>N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1$, *тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится. Если* $\forall n>N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}\ge q>1$, *тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *расходится.*

Доказательство. Пусть $\forall n>N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1$.

Тогда $a_{n+1}\le qa_n\le q^2a_{n-1}\le q^3a_{n-2}\le\ldots\le q^na_1$ и

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n\le a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-1}=a_1(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})\le\frac{a_1}{1-q},$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

Пусть $\forall n>N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}\ge q>1$. Тогда $a_2\ge qa_1>a_1$, и, кроме того, $a_3\ge qa_2\ge q^2a_1>a_1\ldots a_n\ge q^{n-1}a_1>a_1$. Поэтому a_n не стремится к нулю при

$n \to \infty$, необходимый признак сходимости ряда не выполнен, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема 2.6. (Предельная форма признака Даламбера). *Пусть* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$*, тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Пусть* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$*, тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится. Если* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = 1$*, то признак не позволяет сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ будет справедливо неравенство $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$.

При малом ε $0 < q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1$. По конечной форме признака Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$. Тогда снова для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ будет справедливо неравенство $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$.

При малом ε $1 < q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то есть $\forall n > N$ $a_{n+1} > a_n$. Поэтому a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$, необходимый признак сходимости ряда не выполнен, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Замечание 2.2. Признак Даламбера удобно применять, когда общий член ряда содержит произведение некоторых чисел или факториал.

Правда, если общий член ряда содержит факториал, то его можно заменить по формуле Стирлинга $n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi\, n}$ при $n\to\infty$ и применять второй признак сравнения.

Пример 2.15. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1.$$

Следовательно, ряд сходится по признаку Даламбера.

Пример 2.16. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$. Имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}\,e^n n!}=\frac{e(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1,$$

так как последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, монотонно возрастая, стремится к e при $n\to\infty$, то $\forall n>N$ выполняется $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$. Следовательно, $\forall n>N$ $a_{n+1}>a_n$. Поэтому a_n не стремится к нулю при $n\to\infty$, необходимый признак сходимости ряда не выполнен, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1$. Поэтому признак Даламбера в предельной форме не дает ответ о сходимости или расходимости ряда, хотя признак в конечной форме позволяет установить расходимость ряда.

Пример 2.17. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ сходится. Для данного ряда имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)!\right)^2(2n)!}{(2n+2)!(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n!(n+1)\right)^2\cdot(2n)!}{(2n)!(2n+1)\cdot(2n+2)(n!)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)\cdot(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)}=\frac{1}{4}<1,$$

следовательно, ряд сходится.

Теорема 2.7. (Радикальный признак Коши – конечная форма). *Если* $\forall n>N \quad \sqrt[n]{a_n}\le q<1$, *тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится. Если* $\forall n>N \quad \sqrt[n]{a_n}\ge q>1$, *тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *расходится.*

Доказательство. Пусть $\forall n>N \quad \sqrt[n]{a_n}\le q<1$. Тогда $a_n\le q^n, q<1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится по первому признаку сравнения с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Пусть $\forall n>N \quad \sqrt[n]{a_n}\ge q>1$. Тогда $a^n\ge q^n>1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, так как необходимый признак сходимости ряда не выполнен.

Теорема 2.8. (Предельная форма радикального признака Коши). *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q<1$, *тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится. Если* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q>1$, *тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *расходится.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q<1$, тогда для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $N=N(\varepsilon)$, что для всех $n>N$ будет справедливо неравенство

$\left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < \varepsilon$. При некотором малом ε имеем $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по конечной форме радикального признака Коши.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ будет справедливо неравенство $\left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < \varepsilon$. $\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon > 1$ при малом ε. Тогда $a^n \geq q^n > 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, так как необходимый признак сходимости ряда не выполнен.

Пример 2.18. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^{n-1}}$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt[n]{3n}}{3} = \frac{2}{3} < 1,$$

ряд сходится по радикальному признаку Коши в предельной форме.

Пример 2.19. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1} \right)^n$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1,$$

ряд сходится по радикальному признаку Коши в предельной форме.

Пример 2.20. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{1-\frac{1}{n}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{2} \cdot e > 1,$$

ряд сходится по радикальному признаку Коши в предельной форме.

Пример 2.21. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin^n\frac{\pi}{2n}$. Для данного ряда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\sin^n\frac{\pi}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n}.$$

Учтем, что $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}=0$; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=(\infty^0)$.

Для раскрытия неопределенности вида $\infty\cdot 0$ введем обозначение $y=n^{\frac{1}{n}}$ и найдем вначале $\lim_{n\to\infty}\ln y=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=0$.

Так как $\ln y$ – функция непрерывная, то $\lim_{n\to\infty}(\ln y)=\ln\left(\lim_{n\to\infty}y\right)$; следовательно, $\ln\left(\lim_{n\to\infty}y\right)=0$ и $\lim_{n\to\infty}y=e^0=1$. Итак, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Таким образом, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\sin^n\frac{\pi}{2n}}=1\cdot 0=0<1$; следовательно, ряд сходится.

Замечание 2.3. У каждого признака сходимости есть своя «зона нечувствительности». Ни признак Даламбера, ни радикальный признак Коши не позволяют установить расходимость гармонического ряда. Гармонический ряд расходится, но расходится так слабо, что попадает в «зону нечувствительности» указанных признаков. Интегральный признак Коши имеет меньшую «зону нечувствительности» и позволяет установить расходимость гармонического ряда.

Рассмотрим еще один признак сходимости, позволяющий устанавливать сходимость рядов тогда, когда признак Даламбера оказывается бессильным.

Теорема 2.9. (признак Раабе) *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\rho,$$

то: 1) *при* $\rho>1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится,* 2) *при* $\rho<1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *расходится.*

Доказательство. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1}{\frac{1}{n}}=s.$$

Из тождества

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}=1+\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1\right)$$

после логарифмирования получаем

$$s\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(1+\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1\right)\right).$$

Отсюда

$$\frac{s\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1\right)\right)}=1.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1\right)\cdot\frac{s\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1\right)\right)}=$$

$$=s\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1}\cdot\ln\left(1+\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1\right)\right)}=s\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\ln\left(1+\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1\right)\right)^{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1}}}=$$

$$= s \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1\right)\right)^{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}}} = s \cdot \frac{\ln e}{\ln e} = s\,.$$

В условиях теоремы для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует n_ε, такой что для всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство:

$$\left| n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - \rho \right| < \varepsilon\,,$$

или

$$\rho - \varepsilon < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < \rho + \varepsilon\,.$$

Пусть $\rho > 1$, тогда $\rho - \varepsilon > 1$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Обозначили $n_\varepsilon = N$, тогда, начиная с номера N, из предыдущего неравенства следует, что выполняется следующее неравенство:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > \rho - \varepsilon > 1.$$

Откуда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{\rho - \varepsilon}{n}\,.$$

Выберем некоторое $1 < s < \rho - \varepsilon$. Тогда, для достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < \rho - \varepsilon$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{\rho - \varepsilon}{n}\,.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^s$$

или

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}.$$

В последнем соотношении справа – отношение двух последовательных членов ряда Дирихле при $s>1$; после применения теоремы 4.2 становится очевидной сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть теперь $\rho<1$, тогда, аналогично предыдущему получаем неравенство:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) < \rho+\varepsilon < 1.$$

Отсюда:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}};$$

после применения к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и ряду Дирихле теоремы 4.2 становится понятна расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 2.22. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\right)^p$.

Имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot (2n+2)}\right)^p}{\left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\right)^p} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}\right)^p=1.$$

Признак Даламбера на вопрос о сходимости данного ряда ответа не дает. Исследуем ряд с помощью признака Раабе. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}.$$

Получилась неопределенность типа $\frac{0}{0}$, поэтому применим первое правило Лопиталя-Бернулли:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{p\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{p-1}\left[-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]\cdot 2}{-\frac{1}{n^2}}=$$

$$=2p\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{p-1}n^2}{(2n+1)^2}=2p\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}=2p\cdot\frac{1}{4}=\frac{p}{2}.$$

Ряд расходится при $p<2$, сходится при $p>2$, а при $p=2$ признак Раабе на вопрос о сходимости ответа не дает.

Теорема 2.10. (Теорема Дирихле о возможности перестановки местами членов ряда в сходящихся знакоположительных рядах). *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ – *сходящийся знакоположительный ряд. Тогда его члены можно переставлять, менять местами, полученный ряд будет сходиться и иметь ту же сумму.*

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Пусть меняются местами два члена ряда a_k и a_m, $m>k$. Тогда в исходном и полученном перестановкой членов рядах частичные суммы, начиная с S_m будут совпадать. Следовательно, ряд, полученный перестановкой двух членов ряда, будет сходиться и иметь ту же сумму.

Пусть при перестановке местами r членов ряда ряд сходится и имеет ту же сумму.

Пусть переставляются $r+1$ членов ряда. Эта перестановка сводится к перестановке r членов ряда, а затем к перестановке еще какого-либо члена с каким-либо другим (перестановке двух членов ряда).

По индуктивному предположению при перестановке местами r членов ряда ряд сходится и имеет ту же сумму. Ряд, полученный перестановкой двух членов ряда, будет сходиться и иметь ту же сумму. Следовательно, и при перестановке $r+1$ членов ряда ряд будет сходиться и иметь ту же сумму.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать ряды на сходимость

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+1}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+4n^5+2}}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2+3}\right)$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^8}}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}$. 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)$ (Указание: воспользоваться эквивалентностями: $1-\cos x \sim 2\sin^2\frac{x^2}{2} \sim 2\left(\frac{x^2}{2}\right)^2$).

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^n}$. 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(2n+1)^2}$. 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n+2}}{n!}$. 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 9\cdot\ldots\cdot(5n-1)}{5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$.

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n^2+5n-1}{4n^2+2}\right)^{3n+2}$. 13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$. 15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$. 17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2$. 18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+5}{3^n\cdot(n+1)}$. 19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n\cdot(2n+3)}$.

20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{15n^2+6n+4}{3n+2+12n^2}\right)^n$. 21) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$. 22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt[3]{n^7}+n}$.

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right)$. 24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3}+5}$.

3. Знакопеременные ряды

3.1. Абсолютно сходящиеся ряды

Определение 3.1. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется знакопеременным, если среди членов ряда содержится бесконечное количество отрицательных членов и бесконечное количество положительных членов.*

Определение 3.2. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется абсолютно сходящимся, если ряд из модулей членов ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *сходится.*

Теорема 3.1. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, то он сходится.*

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |a_n|\right)$ тоже сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ – знакоположительный, так как $a_n > -|a_n|$ и сходится по первому признаку сравнения рядов по сравнению со знакоположительным рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |a_n|\right)$, так как $a_n \le |a_n|$. Вычитая из сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, получаем *сходящийся ряд* (свойство сходящихся рядов) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 3.2. (о перестановке членов в абсолютно сходящихся рядах). *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится, тогда его члены можно переставлять, получая абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство. Обозначим через s – сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а через S – сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$. Он знакоположительный, так как $a_n > -|a_n|$. Этот ряд сходится по первому признаку сравнения рядов по сравнению со знакоположительным рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |a_n|\right)$, так как $a_n \le |a_n|$. Его сумма равна $s + S$.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ получен перестановкой членов из $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ получен перестановкой членов из $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. По теореме Дирихле он сходится и имеет ту же сумму S.

Знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n + |b_n|$ получен перестановкой членов из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$. Следовательно, по теореме Дирихле, он сходится и имеет ту же сумму $s + S$.

Вычитая из сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n + |b_n|$ сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. По свойствам сходящихся рядов он сходится и имеет сумму, равную $(s + S) - S = s$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный при перестановке членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, сходится и имеет ту же сумму, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть даны сходящиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = S_1 \qquad (3.1)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = b_1 + b_2 + ... + b_m + ... = S_2 \qquad (3.2)$$

По аналогии с правилом умножения конечных сумм, рассмотрим всевозможные парные произведения $a_i b_j$ членов рядов (3.1) и (3.2), составляя из них бесконечную прямоугольную таблицу:

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & ... & a_ib_1 & ... \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & ... & a_ib_2 & ... \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & ... & a_ib_3 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k & ... & a_ib_k & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{array} \right. \qquad (3.3)$$

Произведения из таблицы (3.3) можно различными способами располагать в виде *простой последовательности*. Например, можно выписывать произведения *по диагоналям* или *по квадратам*, что приводит к последовательностям соответственно:

$$a_1b_1; \quad a_1b_2,\ a_2b_1; \quad a_1b_3,\ a_2b_2,\ a_3b_1;$$

$$a_1b_1; \quad a_1b_2,\ a_2b_2,\ a_2b_1; \quad a_1b_3,\ a_2b_3,\ a_3b_3,\ a_3b_2,\ a_3b_1; \quad \ldots$$

Составленный из подобной последовательности ряд называется *произведением рядов* (3.1) и (3.2).

Теорема 3.3. (Коши). *Если ряды (3.1) и (3.2) сходятся абсолютно, тогда их произведение, составленное из произведений (3.3), взятых в любом* *порядке, также сходится и имеет сумму, равную произведению S_1S_2 сумм исходных рядов.*

Доказательство. По предположению, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|b_m|$ сходятся, т.е. имеют конечные суммы, например, S_1^* и S_2^*. Расположив произведения (3.3) произвольным образом в виде последовательности, составим из них ряд:

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s} = a_{i_1} b_{k_1} + a_{i_2} b_{k_2} + \ldots + a_{i_s} b_{k_s} + \ldots \tag{3.4}$$

Для доказательства сходимости соответствующего ряда из абсолютных величин:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left|a_{i_s} b_{k_s}\right| = \left|a_{i_1} b_{k_1}\right| + \left|a_{i_2} b_{k_2}\right| + \ldots + \left|a_{i_s} b_{k_s}\right| + \ldots \tag{3.5}$$

будем рассматривать его s-ю частичную сумму. Обозначая через ν наибольший из индексов $i_1, k_1, i_2, k_2, \ldots, i_s, k_s$, имеем:

$$\left|a_{i_1} b_{k_1}\right| + \left|a_{i_2} b_{k_2}\right| + \ldots + \left|a_{i_s} b_{k_s}\right| \le \left(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_\nu|\right)\left(|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_\nu|\right) \le S_1^* S_2^*.$$

Отсюда вытекает сходимость ряда (3.5), следовательно, и абсолютная сходимость ряда (3.4). Определим его сумму.

Разместив члены ряда (3.4) по квадратам, объединим последовательные группы:

$$a_1b_1 + \left(a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1\right) + \left(a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1\right) + \ldots$$

Последовательность частичных сумм для ряда

$$S_1^1S_2^1,\ S_1^2S_2^2,\ S_1^3S_2^3,\ \ldots,\ S_1^kS_2^k,\ \ldots$$

стремится к произведению S_1S_2, которое является не только суммой последнего ряда, но и ряда (3.4).

Замечание 3.1. При фактическом умножении рядов удобнее всего размещать произведения (3.3) по диагоналям. При этом члены, лежащие на одной диагонали, объединяются:

$$S_1S_2 = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \dots$$

Именно в таком виде Коши впервые и представил произведение двух рядов. Будем называть эту запись *произведением* рядов (3.1) и (3.2) *в виде Коши*.

3.2. Условно сходящиеся ряды

Определение 3.3. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется условно сходящимся, если ряд из модулей членов ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *расходится, а сам ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Обозначим $p_n > 0$ – положительные члены, q_n – отрицательные члены знакопеременного ряда, A – ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, Am – ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, P – ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, Po – ряд A, в котором все отрицательные члены заменены нулями на тех же местах, Q – ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$, Qo – ряд A , в котором все положительные члены заменены нулями на тех же местах. Например,

$$A = p_1 + \quad p_2 + \quad q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + p_3 + q_5 + q_6 + p_4 + p_5 + q_7 + \dots$$

$$Am = |p_1| + |p_2| + |q_1| + |q_2| + |q_3| + |q_4| + |p_3| + |q_5| + |q_6| + |p_4| + |p_5| + |q_7| + \dots$$

$$Po = p_1 + p_2 + 0 + 0 + 0 + 0 + p_3 + 0 + 0 + p_4 + p_5 + 0 + \dots$$

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + \dots$$

$$Qo = 0 + 0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + 0 + q_5 + q_6 + 0 + 0 + q_7 + \dots$$

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 + \dots$$

Теорема 3.3. *Ряды* P, Po, *ряды* Q, Qo *сходятся или расходятся одновременно*.

Доказательство. Так как ряд знакопеременный, то два последовательных положительных члена отделяет друг от друга конечное число отрицательных членов. То же верно и для последовательных отрицательных членов. Пусть первая серия нулей в Po: $a_{r+1} \dots a_{r+k}$ Тогда

$S_{\Pr} = S_{Por} = S_{Por+1} = ... = S_{Por+k}$, т.е. k элементов в последовательности частичных сумм повторяются. Исключим их из последовательности и перенумеруем члены (это соответствует исключению серии нулей). Исключение последовательных одинаковых элементов не влияет на сходимость и предел последовательности. Далее доказательство можно провести по индукции, так как операция исключения нулей аналогична. Поэтому ряды Po и P сходятся или расходятся одновременно. Аналогичное верно и для Qo и Q.

Теорема 3.4. *Если P сходится, Q – сходится, то Am сходится, т.е. ряд A сходится абсолютно.*

Доказательство. Так как P сходится, то Po сходится, так как Q – сходится, то Qo – сходится. Складывая сходящиеся ряды Po и (-Qo) почленно (учитывая, что $|p_n| = p_n, |q_n| = -q_n$), получим сходящийся ряд. Это – ряд Am.

Теорема 3.5. *Если P сходится и Q расходится или P расходится и Q сходится, то A расходится.*

Доказательство. Рассмотрим один из вариантов. Пусть P сходится и Q расходится.

Тогда Po сходится. Будем доказывать от противного. Пусть A сходится, тогда, вычитая из него сходящийся ряд Po, получим сходящийся ряд Qo. Тогда по доказанной выше теореме ряд Q сходится. Противоречие.

Второй вариант P расходится и Q сходится рассматривается аналогично.

Теорема 3.6. *Пусть ряд A условно сходится, тогда ряды P и Q расходятся.*

Доказательство. Если P, Q оба сходятся, то по доказанной выше теореме Am сходится, т.е. ряд A сходится абсолютно. Противоречие.

Если P сходится и Q расходится или P расходится и Q сходится, то A расходится (по доказанной выше теореме). Противоречие.

Следовательно, оба ряда P, Q расходятся.

Итак, получена следующая схема.

$$\{P\ сх,\ Q\ расх\ или\ P\ расх,\ Q\ сх \Rightarrow A\ расх, \quad \begin{cases} P\ сх \\ Q\ сх \end{cases} \Rightarrow A\ абсол.\ сх$$

$$A\ абсол.\ сх \Rightarrow \begin{cases} P\ сх \\ Q\ сх \end{cases} \quad A - усл.\ сх \Rightarrow \begin{cases} P\ расх \\ Q\ расх \end{cases}.$$

Эта схема отражает суть теорем о структуре знакопеременных рядов.

Пример 3.1. Рассмотрим знакопеременный ряд

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} + \frac{1}{8} - \frac{1}{81} + \ldots .$$

Тогда $P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ – сходящаяся бесконечно убывающая геометрическая прогрессия;

$Q = -\frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} - \ldots$ – сходящаяся бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, исходный ряд A абсолютно сходится.

Пример 3.2. Рассмотрим знакопеременный ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \frac{1}{9} + \ldots$$

Тогда $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ – сходящаяся бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Q: $Q = -\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \ldots$ – расходящийся ряд (по второму признаку сравнения с гармоническим рядом). Следовательно, исходный ряд A расходится.

Теорема 3.7. (Теорема Римана). *Пусть* S *– произвольное число (конечное или бесконечное). Тогда можно так переставить местами члены условно сходящегося знакопеременного ряда, что его сумма будет равна* S.

Доказательство. Так как ряд A условно сходится, то ряды P и Q расходятся (теоремы о структуре знакопеременного ряда). Пусть для определенности $S>0$. Переставляем в начало ряда столько положительных членов, чтобы их сумма стала больше S. Теперь переставляем столько отрицательных членов, чтобы частичная сумма ряда стала бы меньше S. Повторяем этот процесс. Процесс осуществим для любого S, так как ряды P и Q расходятся (т.е. повторением членов можно набрать любую их сумму). С другой стороны, частичная сумма сконструированного ряда сходится именно к S. В сконструированном ряде $|S_n - S| < b_n$ где b_n – тот член ряда, добавление которого меняет знак $S_n - S$. $b_n \to 0$ при $n \to \infty$ так как знакопеременный ряд условно сходится.

Сам ход доказательства напоминает добавление положительных членов – гирь на одну чашку весов, пока весы не покажут вес, больший S. Последний член – гиря b_n. Затем добавление на другую чашку весов столько отрицательных – членов (вернее гирь, весом, равным модулям этих членов), чтобы весы показали вес, меньший S. Процесс повторяется. Вес гирь, вызывающих переход указателя весов через S, убывает до нуля, так как для условно сходящегося ряда выполняется необходимый признак сходимости. Поэтому $S_n \to S$ при $n \to \infty$.

3.3 Знакочередующиеся ряды

Определение 3.4. *Знакопеременный ряд называется знакочередующимся, если знаки членов ряда чередуются, т.е. ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *имеет вид* $v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots$. *Предполагаем, что ряд начинается с положительного члена,* $v_1 > 0$.

К знакочередующимся рядам можно применить все теоремы, доказанные выше для знакопеременных рядов. Но есть специальный, очень удобный *достаточный* признак сходимости знакочередующихся рядов – признак Лейбница (он не является необходимым признаком).

Теорема 3.8. (Признак Лейбница). *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *имеет вид* $v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots$ (*знакочередующийся,* $v_k > 0,\ \forall k \geq 1$), *последовательность* $\{v_n\}$ *монотонно убывает и* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. *Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и его сумма* $|S| \leq v_1$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность частичных сумм с четными номерами $S_{2n} = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots > 0$, т.к. $v_1 - v_2 > 0$, $v_3 - v_4 > 0 \ldots$ (последовательность $\{v_n\}$ монотонно убывает по условию теоремы). Кроме того,

$$S_{2n} = v_1 - (v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - \ldots < v_1,$$

Поскольку $v_2 - v_3 > 0, \quad v_4 - v_5 > 0 \ldots$

Т.е. последовательность $\{S_{2n}\}$ *ограничена сверху* значением v_1. Далее

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = (v_1 - v_2 + \ldots + v_{2n-1} - v_{2n} + v_{2n+1} - v_{2n+2}) - (v_1 - \ldots - v_{2n}) = v_{2n+1} - v_{2n+2} > 0$$

Т.е. последовательность $\{S_{2n}\}$ монотонно возрастает. По теореме Вейерштрасса существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Рассмотрим теперь последовательность частичных сумм с нечетными номерами

$S_{2n+1} = S_{2n} + v_{2n+1}$.

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} v_{2n+1} = 0$.

По доказанному выше $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Следовательно, предел правой части равенства существует и равен S. Поэтому предел левой части равенства тоже существует и равен $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$.

Раскроем определение предела $\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon), \forall n > N \quad |S_n - S| < \varepsilon$ как для четных, так и для нечетных n. Следовательно, это справедливо для любых $n > N$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Из доказанного выше неравенства $0 < S_{2n} < v_1$. Переходя к пределу, получим, что $0 \le S \le v_1, т.е. |S| \le v_1$.

Следствие 3.1. *Остаток ряда оценивается модулем первого отброшенного члена ряда.* $| R_n | \le | a_{n+1} |$.

Доказательство. Так как остаток знакочередующегося ряда тоже знакочередующийся ряд, то его сумма по признаку Лейбница оценивается модулем его первого члена.

То есть $| R_n | = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_n \right| \le |a_{n+1}|$. А первый член остатка ряда и есть первый отброшенный член.

Замечание 3.2. Для условно сходящихся рядов теорема 3.2 не имеет места. В самом деле, ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

Сходится в силу признака Лейбница, но не сходится абсолютно. Кроме того, ясно, что сумма этого ряда положительна. Перегруппируем члены этого ряда следующим образом:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \text{ и т.д.}$$

Тогда получим ряд

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots\right),$$

сумма которого в два раза меньше суммы исходного ряда.

Пример 3.3. Рассмотрим ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots$. Здесь $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, $v_n=\frac{1}{n}$.

Ряд сходится по признаку Лейбница. Ряд из модулей – расходящийся гармонический ряд. Следовательно, ряд сходится условно. Кроме того, $|R_n|<\frac{1}{n+1}$.

Пример 3.4. Выяснить, сходится ли абсолютно или условно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Данный знакочередующийся ряд сходится по теореме Лейбница, так как

$$\frac{1}{3}>\left(\frac{2}{5}\right)^2>\left(\frac{3}{7}\right)^3>\ldots>\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n>\ldots$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right)^n=0.$$

Сходимость соответствующего знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ исследуем с помощью радикального признака Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, ряд сходится и исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 3.5. Выяснить, сходится ли абсолютно или условно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

Данный знакочередующийся ряд сходится по теореме Лейбница, так как

$$\frac{1}{2\sqrt{\ln 2}}>\frac{1}{3\sqrt{\ln 3}}>\ldots>\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}>\ldots$$

и, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}=0$.

Сходимость соответствующего знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$ исследуем с помощью интегрального признака Коши. Имеем

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}=\int_1^{\infty}\frac{d\ln(x+1)}{\sqrt{\ln(x+1)}}=2\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{\ln(b+1)}-\sqrt{\ln 2}\right)=\infty.$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$ расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом, а, значит, исследуемый ряд сходится условно.

Пример 3.6. Выяснить, сходится ли абсолютно или условно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$.

Данный знакочередующийся ряд сходится по теореме Лейбница, так как, начиная с $n=4$,

$$\frac{4^3}{2^4}>\frac{5^3}{2^5}>\frac{6^3}{2^6}>\ldots>\frac{n^3}{2^n}>\ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2^n\cdot\ln 2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{2^n\cdot\ln^2 2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{2^n\ln^3 2}=0.$$

Сходимость соответствующего знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ исследуем с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n^3}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{2}<1,$$

следовательно, ряд сходится и исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 3.7. Выяснить, сходится ли абсолютно или условно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$. Данный ряд расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\neq 0.$$

Пример 3.8. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{\ln^2 n}{n}$. Пусть $a_n=\frac{\ln^2 n}{n}$. Для доказательства убывания последовательности $\left(a_n\right)$ рассмотрим функцию $f\left(x\right)=\frac{\ln^2 x}{x}$. Имеем: $f'\left(x\right)=\frac{\ln x\left(2-\ln x\right)}{x^2}<0$ при $x>e^2$. Поэтому функция $f\left(x\right)$ убывает на промежутке $\left(e^2,+\infty\right)$. Значит, $a_n>a_{n+1}>0$ при $n\geq n_0=8$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}=0$. По признаку Лейбница ряд сходится.

Пример 3.9. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\frac{1}{3^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{12^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n)^2}+\ldots \quad .$$

Найти приближенно (с точностью 0,01) сумму этого ряда.

Все условия теоремы Лейбница для данного знакочередующегося ряда здесь выполнены: члены по модулю монотонно убывают и стремятся к нулю.

Сходимость соответствующего знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^2}$.

Легко обнаружить, если применить предельный признак сравнения со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(3n)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(3n)^2}=\frac{1}{9}>0.$$

Из чего следует, что ряд сходится и исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 3.10. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$.

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^3}=\frac{|\sin 1|}{1^3}+\frac{|\sin 2|}{2^3}+\ldots+\frac{|\sin n|}{n^3}+\ldots$$

Так как $|\sin n|\le 1$, то каждый член предыдущего ряда не превышает соответствующего члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots$$

Этот ряд является рядом Дирихле, $p=3$ и, значит, сходится. Согласно первому признаку сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^3}$ также сходится. Тогда, по теореме об абсолютной сходимости, данный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Пример 3.11. Сколько членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^3}=1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n^3}+\ldots$$

нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

Данный ряд является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим всем условиям признака Лейбница:

$$1 > \frac{1}{2^3} > \frac{1}{3^3} > \frac{1}{4^3} > \ldots; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

Следовательно, данный ряд сходится, притом абсолютно.

Чтобы вычислить сумму этого ряда с указанной точностью, необходимо найти такой член, абсолютная величина которого меньше 0, 001, т. е. $\frac{1}{n^3} < 0{,}001$ или $n^3 > 1000$, иначе говоря, $n > 10$. Следовательно, нужно просуммировать 10 первых членов данного ряда. Так как

$$a_{11} = \frac{1}{11^3} < 0{,}001,$$

то получаем следующую оценку для ошибки:

$$|r_{10}| \le a_{11} < 0{,}001.$$

Пример 3.12. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\ln n\cdot\cos n}{n^2+1}$ абсолютно сходится.

Воспользуемся неравенством $\ln n \le n^q$ при $n \ge 1$ и $0 < q < \frac{1}{2}$, получим, что

$$\left|\frac{\sqrt{n}\ln n\cdot\cos n}{n^2+1}\right| \le \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} < \frac{\sqrt{n}\cdot n^q}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-q}} \left|\frac{\sqrt{n}\ln n\cdot\cos n}{n^2+1}\right| \le \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} < \frac{\sqrt{n}\cdot n^q}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-q}}$$

.

В силу выбора числа q справедливо неравенство $\frac{3}{2} - q > 1$. Но тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-q}}$ и по мажорантному признаку сравнения исследуемый ряд сходится абсолютно.

Естественно, существуют знакочередующиеся ряды, для которых условия теоремы Лейбница могут не выполняться; если не выполняется второе условие – необходимый признак сходимости – то ряд заведомо расходится; если не выполняется первое условие, то задача должна решаться с помощью других соображений. Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{5}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}+\frac{1}{\sqrt{7}+1}-\frac{1}{\sqrt{7}-1}+....+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+1}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}-1}+...$$

Понятно, что первое условие теоремы Лейбница не выполняется (например, $a_2 > a_1$), поэтому эта теорема неприменима и требуется изобрести индивидуальный способ решения этой задачи. Сгруппируем члены попарно:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)+...+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}+1}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}-1}\right)+....$$

Сумма в скобке $\frac{1}{\sqrt{2n+1}+1}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}-1}=\frac{1}{2n}$, поэтому последний ряд (со скобками) расходится. Последовательность чётных частичных сумм неограниченна, поэтому исходный ряд расходится.

Теорема 3.9. (Преобразование Абеля). *Для любых чисел* $\{a_k\}$ *и* $\{b_k\}$, $k=1,2,...,m$ *справедливо представление:*

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} a'_k B_k \,, \tag{3.6}$$

где $a'_k = a_{k+1} - a_k$, $B_k = b_1 + b_2 + ... + b_k$.

Доказательство. При $m=2$ представление вытекает из тождества

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_2(b_1+b_2) - (a_2 - a_1) b_1 .$$

Предположим, что формула (3.6) верна для m и докажем ее справедливость $m+1$:

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k b_k = a_{m+1}b_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} a_k b_k = a_{m+1}b_{m+1} + a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} a'_k B_k$$
$$= a_{m+1}b_{m+1} + a_m B_m - \sum_{k=1}^{m} a'_k B_k + \left(a_{m+1} - a_m\right) B_m = a_{m+1}B_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a'_k B_k \,.$$

Теорема 3.10.(Признак Абеля). *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится, если*

1) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и*

2) *последовательность* $\{b_n\}$ *монотонна и ограничена.*

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Абеля для оценки отрезка ряда:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| = \left|b_m\left(a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m\right) - \sum_{k=n}^{m-1}\left(b_{k+1} - b_k\right)\left(a_n + a_{n+1} + \ldots + a_k\right)\right|, \qquad (3.7)$$

Для любого $\varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N, m > n \Rightarrow \left|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m\right| < \dfrac{\varepsilon}{2B}$ и $\left|b_m - b_n\right| \le B.$

Здесь константа B ограничивает значения модулей членов последовательности $\{b_n\}$: $|b_n| \le B$ для всех n. Пусть последовательность $\{b_n\}$ монотонно возрастает. Тогда

$b_{k+1} - b_k > 0$ (в противном случае $-(b_{k+1} - b_k) > 0$).

Для второго слагаемого справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1} - b_k)(a_n + a_{n+1} + \ldots + a_k)\right| \le \sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1} - b_k)\left|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_k\right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2B}\sum_{k=n}^{m-1}\left(b_{k+1} - b_k\right) = \frac{\varepsilon}{2B}(b_m - b_n) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Первое слагаемое оценивается проще:

$$\left|b_m(a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m)\right| \le |b_m| \cdot \left|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m\right| \le B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \le \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ для всех $n > N$ и $m > n$ для ряда выполняется критерий Коши, что завершает доказательство теоремы.

Теорема 3.11.(Признак Дирихле). *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится, если*

1) частичные суммы $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ *ограничены и*

2) последовательность $\{b_n\}$ *монотонно стремится к нулю.*

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Абеля. Тогда $\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N, m > n \Rightarrow |b_n| \le \frac{\varepsilon}{2A}$, $|b_m - b_n| \le \frac{\varepsilon}{2A}$, где A – константа, ограничивающая отрезки ряда $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_k| \le A, \forall n,k$.

Первое слагаемое в (3.7) оценивается как

$$|b_m(a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m)| \le |b_m| \cdot |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| \le \frac{\varepsilon}{2A} \cdot A = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Второе слагаемое с учетом знакопостоянства $b_{k+1} - b_k > 0$ для всех k (монотонность $\{b_n\}$) (или $-(b_{k+1} - b_k) > 0$) оценивается:

$$\left|\sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1} - b_k)(a_n + a_{n+1} + \ldots + a_k)\right| \le \sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1} - b_k)|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_k| \le$$

$$\le A\sum_{k=n}^{m-1}\left(b_{k+1} - b_k\right) = A(b_m - b_n) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ для всех $n > N, m > n$ и для ряда выполняется критерий Коши, что завершает доказательство теоремы.

Хотя в формулировках признаков Абеля и Дирихле не указано, что рассматриваемые ряды имеют члены разных знаков, но область их применения – именно такие ряды.

Из всего сказанного вытекает, что знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можно исследовать по следующей схеме.

1) Составляем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

2) Найдем $\lim_{n\to\infty}|a_n|$. Если он не равен нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ или найти его нелегко, то переходим к следующему пункту.

3) Применим к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ один из признаков сходимости положительных рядов. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно. Если согласно признаку Даламбера или Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ окажется расходящимся, то и знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится по какой-нибудь другой причине, то переходим к следующему пункту.

4) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ исследуем на сходимость с помощью одного из признаков Лейбница, Абеля или Дирихле. Если в результате исследования окажется, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то эта сходимость условная.

Пример 3.13. Пусть последовательность $\{a_n\}$ стремится к нулю монотонно. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\alpha n$.

Частичные суммы

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\cos\alpha n=\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{k}e^{i\alpha n}=\mathrm{Re}\frac{e^{i\alpha}(1-e^{i\alpha k})}{1-e^{i\alpha}}=\frac{\sin\left(k\alpha+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

ограничены и ряд сходится согласно признаку Дирихле.

Пример 3.14. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{n^2+n+1}{n^2\ln n}$. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2\ln n}.$$

Имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}.$$

Так как ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ расходится, то и ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\left|a_n\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2\ln n}$ тоже расходится.

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{n^2+n+1}{n^2\ln n}$ является знакочередующимся, однако признак Лейбница к нему применить трудно. Воспользуемся для исследования ряда признаком Абеля. Положим $a_n=\frac{\left(-1\right)^n}{\ln n}$ и $b_n=\frac{n^2+n+1}{n^2}$

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\ln n}$ сходится, как ряд лейбницевского типа. Для $b_n=\frac{n^2+n+1}{n^2}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$ имеем $0<b_n<3$ для всякого $n\in\mathbb{N}$. Следовательно, последовательность ограничена. Монотонность последовательности $b_n, n\in\mathbb{N}$ очевидна. В силу признака Абеля данный ряд сходится. Итак, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{n^2+n+1}{n^2\ln n}$ сходится условно.

Пример 3.14 Доказать, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$. Пусть $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$. Ясно, что последовательность $\left(a_n\right)$ убывая стремится к нулю.

Применив формулу $\sin k\cdot\sin k^2=\frac{1}{2}\left(\cos\left(k^2-k\right)-\cos\left(k^2+k\right)\right)$, получаем:

$$=\frac{1}{2}\left(\cos 0-\cos 2+\cos 2-\cos 6+\ldots+\cos\left(n^2-n\right)-\cos\left(n^2+n\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(n^2+n\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(n^2+n\right)\right).$$

Поэтому $|B_n| = \left|\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(n^2+4\right)\right)\right| < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По признаку Дирихле ряд сходится.

Пример 3.15. Доказать, что если последовательность (a_n) монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ сходится при любом $\alpha \in \mathbb{R}$.

Пусть $\alpha \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$. Докажем, что последовательность (B_n) частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$ ограничена. Умножим обе части равенства $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\alpha$ на $2\sin\frac{\alpha}{2}$ и применим формулу

$$2\sin k\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha .$$

Имеем:

$$= \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3}{2}\alpha + \cos\frac{3}{2}\alpha - \cos\frac{5}{2}\alpha + \ldots + \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha = 2\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\frac{n\alpha}{2} .$$

Поскольку при $\alpha \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$,, $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$, то $B_n = \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha \cdot \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ и $|B_n| \leq \dfrac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$ при всех $n \in N$. Значит, по признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ сходится при $\alpha \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$. Если $\alpha = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$, то $\sin n\alpha = \sin 2\pi mn = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и поэтому ряд сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ сходится при любом $\alpha \in \mathbb{R}$, если последовательность (a_n) монотонно стремится к нулю.

Пример 3.16. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\sqrt{n}}arctgn$ сходится при любом $\alpha\in\mathbb{R}$.

Пусть $a_n = arctgn$, $b_n=\frac{\sin n\alpha}{\sqrt{n}}$. Последовательность (a_n), очевидно, ограничена $0<arctg\,n<\frac{\pi}{2}$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\sqrt{n}}$ согласно предыдущему примеру сходится при любом $\alpha\in\mathbb{R}$, т.к. последовательность $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ убывает и стремится к нулю, По признаку Абеля исследуемый ряд сходится при любом $\alpha\in\mathbb{R}$.

Пример 3.17. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$. По формуле приведения получаем:

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1}=\cos\left(\left(\frac{\pi n^2}{n+1}-\pi n\right)+\pi n\right)=(-1)^n\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}-\pi n\right)=$$

$$=(-1)^n\cos\frac{\pi n}{n+1}=(-1)^n\cos\left(\pi-\frac{\pi}{n+1}\right)=(-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}$$

Поэтому общий член данного ряда представим в виде

$$\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}=\cos\frac{\pi}{n+1}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}.$$

Пусть $f(x)=\cos\frac{\pi}{x+1}$, $x\in[2,+\infty)$. Имеем: $f'(x)=\frac{\pi}{(x+1)^2}\sin\frac{\pi}{x+1}>0$ на промежутке $[2,+\infty)$. Поэтому последовательность $a_n=\cos\frac{\pi}{n+1}$ является возрастающей и, кроме того, она ограничена: $\left|\cos\frac{\pi}{n+1}\right|\le 1$ при всех $n\in N$. Функция $g(x)=\frac{1}{\ln^2 x}$ убывает на промежутке $[2,+\infty)$, поскольку

$g'(x) = -\frac{2}{x\ln^3 x} < 0$ при $x \geq 2$. Значит, последовательность $\frac{1}{\ln^2 n}$ убывает и, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^2 n} = 0$. По признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$ сходится. Сославшись на признак Абеля, мы получили, что данный ряд сходится.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$. 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$. 5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$.

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}$. 7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n}$. 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. 9) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n}$. 10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}.\left(n! > 2^n\right)$. 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{2n}$. 13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+3}{5n+2}$.

14) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{\sqrt{2n+1}\cdot 5^n}$. 15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3+2n+5}}$. 16) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^3 n}$. 17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1^n n^2\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}\cdot\arcsin\frac{\pi}{4n}$. 19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg(-n)^n}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$. 20) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln^{\alpha} n}$, $\alpha > 0$.

4. Равномерно сходящиеся ряды

Пусть задана последовательность функций вида

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

Определение 4.1. *Функциональным рядом называется выражение:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{4.1}$$

Областью определения ряда E *называется множество значений переменной* x*, при которых определены все члены ряда*.

Возьмем некоторое значение и подставим его в ряд (4.1), тогда получим числовой ряд. Этот ряд может сходиться, а может и расходиться.

Определение 4.2. *Множество значений переменной* x *, для которых ряд* (4.1) *сходится называется областью сходимости ряда.*

В области сходимости ряда сумма ряда является некоторой функцией, которую будем обозначать как $S(x)$. Определяется она так же, как и для числового ряда. Введем частичную сумму из n первых членов ряда.

Определим частичную сумму ряда как функцию

$$S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x).$$

Зафиксировав некоторую точку x из области определения, получим обычный числовой ряд.

Для определения понятия сходимости функционального ряда, рассмотрим сначала понятие сходимости последовательности функций.

Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ – последовательность функций, определенных на множестве E.

Определение 4.3 *Будем говорить, что эта последовательность сходится поточечно на* E*, если числовая последовательность* $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots$ *имеет предел* $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ *для всякого* $x_0 \in E$.

В этом случае на множестве E *определена функция* $f(x)$ *, значение которой в каждой точке* $x \in E$*, равно пределу последовательности* $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$. *Эту функцию называют предельной функцией последовательности* $\left(f_n(x)\right)$ *и пишут* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$.

Определение 4.4. *Последовательность функций* $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ *сходится равномерно к предельной функции* $f(x)$ *на* E*, если для всякого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такой номер* N*, что для всех* $x \in E$ *и всех* $n > N$ *выполняется неравенство* $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$.

Из этого определения вытекает простой критерий равномерной сходимости последовательности функций.

Для того чтобы последовательность функций $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ *сходилась равномерно на множестве* E *к предельной функции* $f(x)$*, необходимо и достаточно, чтобы* $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \left|f_n(x) - f(x)\right| = 0$.

Пример 4.1 Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n+x}$ на множестве $x \in [0,2]$. Найдем предельную функцию этой последовательности

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{n+x} = x^2, \quad x \in [0,2].$$

Тогда $\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\dfrac{nx^2}{n+x} - x^2\right| = \dfrac{x^3}{n+x} = \varphi_n(x)$. Заметим, что

$$\varphi_n'(x) = \frac{x^2(3n+2x)}{(n+x)^2} > 0$$

для $x \in [0,2]$. Значит, функция $\varphi_n(x)$ монотонно возрастает на интервале $x \in [0,2]$ и, так как она непрерывна на этом отрезке, то принимает наибольшее значение в точке $x = 2$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n+2}=0.$$

Следовательно, последовательность $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{n+x}$ равномерно сходится к $f(x)=x^2$ на интервале $x\in[0,2]$.

Определение 4.5. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *называется сходящимся в точке x, если последовательность* $S_n(x)$ *сходится к* $S(x)$ *или*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon,x),\text{ что }\forall n>N\ \left|S_n(x)-S(x)\right|=\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots\right|<\varepsilon.$$

Это – обычная или *поточечная* сходимость ряда, так как номер N зависит не только от ε, как в числовых рядах, но и от точки x. То есть в каждой точке x ряд сходится со своей скоростью.

Другими словами, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ поточечно сходится к $S(x)$, если последовательность функций $S_n(x)$ поточечно сходится к функции $S(x)$.

Теорема 4.1. (Критерий Коши поточечной сходимости ряда). *Для того чтобы функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *сходился в точке* x, *необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $\varepsilon>0$ *нашелся такой номер* N *(вообще говоря, зависящий от* x *), что*

$$\forall n>N,\forall p\ge 0\ \left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|=\left|u_{n+1}(x)+\ldots u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon.$$

Это – критерий Коши для последовательности частичных сумм ряда. Все точки, в которых ряд сходится, составляют *область сходимости* ряда.

Пример 4.2. Найдем область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{x}{n!}$. Применяя признак Даламбера, найдем

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{x}{(n+1)!}}{\sin\frac{x}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x}{(n+1)!}}{\frac{x}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

Поскольку $l(x)=0<1$ для всех $x\in\mathbb{R}$, то ряд сходится на всей числовой оси.

Пример 4.3. Найдем область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^n$.

Положим $q=\frac{x+2}{2x+1}$ и исследуем на абсолютную и условную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}q^n$. Пользуясь признаком Даламбера, находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|q|^{n+1}\left(n^2+4\right)}{|q|^n\left((n+1)^2+4\right)n}=|q|$$

Ряд сходится абсолютно, если $|q|<1$ и расходится, если $|q|>1$. При $q=1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$ который расходится, так как $\frac{n}{n^2+4}\sim\frac{1}{n}$, $n\to\infty$. При $q=-1$ ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+4}$ и будет сходящимся по признаку Лейбница, но не абсолютно, так как выше было доказано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$ расходится. Используя эти результаты, получаем, что исходный ряд сходится абсолютно при тех значениях x, для которых выполняется неравенство $\left|\frac{x+2}{2x+1}\right|<1$ то есть при $|x|>1$. И ряд сходится условно при тех значениях x, для которых $\frac{x+2}{2x+1}=-1$, то есть $x=-1$. Следовательно, область сходимости данного ряда есть множество $(-\infty,-1]\cup(1,\infty)$, причем, в точке $x=-1$ ряд сходится условно, а в остальных точках сходится абсолютно.

Пример 4.4. Найдем область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$. Заметим, что при любом фиксированном $x<0$ последовательность $u_n(x)=\frac{\cos nx}{e^{nx}}$ не стремится к нулю при $n\to\infty$, то есть нарушается необходимое условие сходимости ряда. Поэтому, если $x<0$, данный ряд расходится. При $x=0$ ряд превращается в расходящийся числовой ряд $1+1+1+\ldots$. Исследуем ряд при $x>0$, используя признак сравнения. В этом случае при всяком $n\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство $\frac{|\cos nx|}{e^{nx}}\le\frac{1}{e^{nx}}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{nx}}$ сходится (как геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\frac{1}{e^{x}}<1$), то данный ряд сходится (абсолютно) на интервале $(0,\infty)$.

Определение 4.6. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *называется равномерно сходящимся к* $S(x)$ *в области* E*, если для всякого* $\varepsilon>0$ *найдется такой номер* N, что $\forall n>N,\ \forall x\in E$ выполняется соотношение

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|=\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots\right|<\varepsilon.$$

Здесь номер N зависит только от ε, но не от точки $x\in E$, поэтому номер N выбирается сразу для всей области . Ряд сходится с одной и той же скоростью для всех точек области . Такая сходимость напоминает сходимость числовых рядов. Действительно, равномерно сходящиеся ряды обладают очень полезными свойствами, которые мы обсудим ниже.

Другими словами, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на E, если последовательность функций $S_n(x)$ равномерно сходится к функции $S(x)$ на E.

Полагая $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ можно сформулировать простой критерий равномерной сходимости ряда.

Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходился на множестве* E *к* $S(x)$*, необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |R_n(x)| = 0$.

Теорема 4.2. (Критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Для того чтобы функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходился в области* E*, необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* $N = N(\varepsilon)$*, что для всех* $n > N(\varepsilon)$ *выполняется соотношение*

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

для всех натуральных p *и всех* $x \in E$.

Доказательство. *Необходимость.* Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно, тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется соотношение

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $x \in E$.

Для любого натурального p и $n > N(\varepsilon)$ очевидно, что $n + p > N(\varepsilon)$. Поэтому и

$$|S_{n+p}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее имеем

$$\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|=\left|\left(S_{n+p}(x)-S(x)\right)-\left(S_n(x)-S(x)\right)\right|\le$$

$$\le\left|S_{n+p}(x)-S(x)\right|+\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon,$$

что и доказывает требуемое утверждение.

Достаточность. Если выполнено условие теоремы, то из неравенства $\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon$ в силу критерия Коши сходимости числовой последовательности вытекает, что для каждого $x\in E$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$.

Фиксируем произвольное $n>N(\varepsilon)$ перейдем в неравенстве $\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon$, справедливом для всякого $x\in E$ к пределу при $p\to\infty$. Тогда получим

$$\left|S(x)-S_n(x)\right|\le\varepsilon<2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.3. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда). *Если члены функционального ряда $u_n(x)$ можно мажорировать (ограничить по модулю) в области членами сходящегося числового знакоположительного ряда*

$$\left|u_n(x)\right|<c_n,\forall x\in E,\sum_{n=1}^{\infty}c_n=C.$$

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ равномерно сходится в области .

Доказательство. Так как числовой ряд сходится, то для него выполнен критерий Коши

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \ \forall n>N,\forall p\ge 0\left|c_{n+1}+\ldots+c_{n+p}\right|=c_{n+1}+\ldots+c_{n+p}<\varepsilon$$

(ряд знакоположителен, $c_k>0$).

Тогда для всякого $\varepsilon>0$ существует такой номер $N=N(\varepsilon)$, что для всех $n>N(\varepsilon)$ выполняется соотношение

$$\forall x\in V,\forall p\ge 0\ \left|u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|<\left|u_{n+1}(x)\right|+\ldots\left|u_{n+p}(x)\right|<$$

$$< c_{n+1} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon .$$

Следовательно, выполнен критерий Коши равномерной сходимости ряда, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области равномерно.

Замечание 4.1. Признак Вейерштрасса является достаточным, но не необходимым признаком равномерной сходимости функционального ряда. В самом деле, функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ сходится равномерно на сегменте $[0,1]$ к сумме $\ln(1+x)$ поскольку разность между $\ln(1+x)$ и $n-$ой частичной суммой этого ряда, равная остаточному члену $R_{n+1}(x)$ в формуле Маклорена для функции $\ln(1+x)$ для всех x из сегмента $[0,1]$ удовлетворяет неравенству

$$R_{n+1}(x) \le \frac{1}{n+1} .$$

Однако для данного функционального ряда не существует на сегменте $[0,1]$ мажорирующего его сходящегося числового ряда, так как для каждого номера $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| = \frac{1}{k}$$

а числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится.

Пример 4.5. Ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно в $\mathbb{R}$, так как $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2}$, *а ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходящийся числовой ряд.

Пример 4.6. Исследуем на равномерную сходимость на промежутке $[0,\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$. На промежутке $[0,\infty)$ дробь $\frac{1}{n+x} > 0$. Значит данный ряд – знакочередующийся и по признаку Лейбница он сходится при любом

$x \in [0,\infty)$. Выясним, будет ли эта сходимость равномерной. Используем критерий равномерной сходимости ряда. Действительно, так как,

$$0 \le \sup_{x\in[0,\infty)} |R_n(x)| \le \frac{1}{n+1},$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |R_n(x)| = 0$, и данный ряд сходится равномерно на промежутке $[0,\infty)$.

Пример 4.7. Исследуем на равномерную сходимость на промежутке $[\delta,\infty), \delta > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$. Представим общий член ряда в виде

$$\frac{1}{((n-1)x+1)} - \frac{1}{(nx+1)}$$

и найдем частичную сумму ряда

$$S_n(x) = \frac{x}{x+1} + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) + \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x+1}\right) + \ldots + \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{nx+1}.$$

Тогда $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 1$ и $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{1}{nx+1}$. При $x > \delta > 0$ имеем $nx > n\delta$. Поэтому $R_n(x) \le \frac{1}{n\delta+1}$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[\delta,\infty),\delta>0} |R_n(x)| = 0$.

Отсюда следует, что ряд сходится равномерно на промежутке $[\delta,\infty), \delta > 0$.

Пример 4.8. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость на промежутке $x \in [0,\infty)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2n} + (n+1)x}}$. В данном случае легко найти

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \frac{1}{\sqrt{2^{2n} + (n+1)x}} = \frac{1}{2^n}.$$

Поэтому в качестве мажорантного ряда можно взять сходящийся геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно на промежутке $x\in[0,\infty)$.

Пример 4.9. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость на промежутке $x\in(-\infty,\infty)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$.

Найдем $\sup_{|x|<\infty}|u_n(x)|$. Так как $(u_n(x))'=\frac{1-x^2n^4}{(1+x^2n^4)^2}$, то для каждого фиксированного n наибольшее значение $u_n(x)$ принимает при $x=\frac{1}{n^2}$. Следовательно, $\sup_{|x|<\infty}|u_n(x)|=u_n\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2n^2}$ и сходящимся мажорантным рядом является ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на равномерную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ на E.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{x\sqrt{n}}$, $E=(0,1)$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{n^2x}}$, $E=(\delta,\infty),\delta>0$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{n^2x}-1}$, $E=(0,\infty)$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{n}}e^{-nx^2}$, $E=(0,\infty)$. 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, $E=[0,2\pi]$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx^2}$, $E=(\delta,\infty),\delta>0$. 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)}{1+\ln^2\left(\frac{n}{x}\right)}$, $E=(0,1)$.

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x}e^{-n^{2/x}}$, $E=(0,\infty)$. 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\sqrt{n}}{1+n^3x}$, $E=(0,\infty)$. 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{x^2+n^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}$, $E=(0,\infty)$. 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{n}$, $E=(0,1)$. 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(nx)}{1+n^2x^2}$, $E=(0,1)$.

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}$, $E=(1,\infty)$. 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin\sqrt{x/n}}{n+x}$, $E=(0,1)$.

4.1 Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Теорема 4.4. **(**О непрерывности суммы ряда). *Пусть члены* $u_n(x)$ *функционального ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *– непрерывные функции в точке* x_0 *– внутренней точке области* E. *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно в области* E. *Тогда сумма функционального ряда – непрерывная функция в точке* $x_0 \in E$.

Доказательство. Так как ряд сходится равномерно в E, то

$$\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall n > N,\ \forall x \in E\ \left|S_n(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ в частности } \left|S_n(x_0) - S(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

.

Так как $u_n(x)$ – непрерывные функции в точке x_0, то и $S_n(x)$ непрерывна в x_0 как сумма конечного числа непрерывных функций.

Зафиксируем . По непрерывности $S_n(x)$ для всякого $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|S_n(x) - S_n(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оценим модуль разности

$$\left|S(x) - S(x_0)\right| \underset{n>N}{=} \left|S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x_0)\right| \le$$

$$\le \left|S(x) - S_n(x)\right| + \left|S_n(x) - S_n(x_0)\right| + \left|S_n(x_0) - S(x_0)\right| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|S(x) - S(x_0)\right| < \varepsilon,$$

то есть сумма функционального ряда – непрерывная функция в точке $x_0 \in E$.

Пример 4.10 Найти область определения $D(f)$ функции $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n^2}$ и исследовать её на непрерывность в области определения. В этом примере функция f – это сумма ряда. Так как сумму имеют лишь сходящиеся ряды, то найти область определения функции f – значит найти область сходимости ряда. Устанавливать непрерывность функции f в области её определения можно с помощью теоремы о непрерывности суммы ряда.

Для нахождения области сходимости ряда воспользуемся признаком Коши. Учитывая, что $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\ln^n x}{n^2}\right|}=|\ln x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}=|\ln x|$$

Ряд сходится, если $|\ln x|<1$, то есть, если $\frac{1}{e}<x<e$. В точках $x=\frac{1}{e}$ и $x=e$ получаем сходящиеся ряды: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n\left(\frac{1}{e}\right)}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Следовательно, $D(f)=\left[\frac{1}{e},e\right]$.

Покажем, что ряд сходится равномерно на отрезке $\left[\frac{1}{e},e\right]$. Для этого построим мажорантный ряд. В силу возрастания функции $\ln x$ и свойств числовых неравенств имеем на рассматриваемом отрезке: $|\ln x|<1$. Поэтому и $|\ln x|^n<1$ для всякого $n\in\mathbb{N}$. Отсюда следует, что $\left|\frac{\ln^n x}{n^2}\right|<\frac{1}{n^2}$, что доказывает равномерную сходимость рассматриваемого ряда на отрезке $\left[\frac{1}{e},e\right]$.

Отсюда и из того, что члены данного ряда непрерывны на $\left[\frac{1}{e}, e\right]$, вытекает, что функция f непрерывна в своей области определения.

Пример 4.11. Найти область определения $D(f)$ функции $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2x^2}$ и исследовать её на непрерывность в области определения. Будем рассуждать по такой же схеме, как и в предыдущем примере. Однако, здесь можно оба пункта объединить в один, учитывая, что $\lim_{n\to\infty} e^{-n^2x^2}=0$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Положим $f_n(x)=x^2e^{-n^2x^2}$ и построим мажорантный ряд. Для этого традиционным способом найдём наибольшее значение функции $f_n(x)$ на $\mathbb{R}$. Имеем

$$f_n{}'(x)=2xe^{-n^2x^2}-n^2 2x^3 e^{-n^2x^2}=2xe^{-n^2x^2}\left(1-n^2x^2\right).$$

Приравнивая производную к нулю, получаем критические точки: $x=0$ и $x=\pm\frac{1}{n}$. Изобразим схематично поведение функции $f_n(x)$.

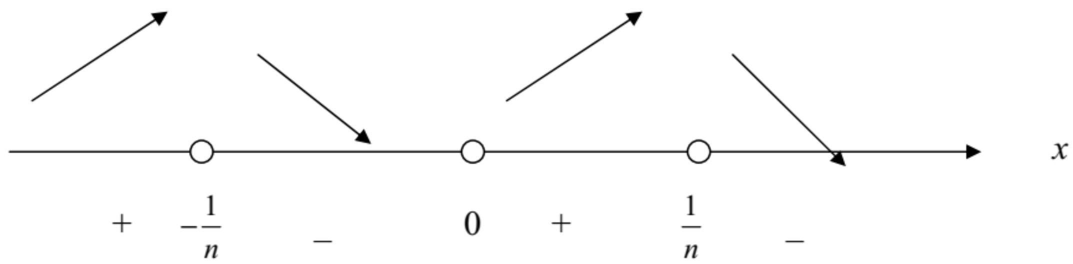


Рис. 4.1. Поведение функций $f_n(x)$

Следовательно, при любом фиксированном $n\in\mathbb{N}$ с учётом чётности и неотрицательности функций $f_n(x)$ имеем: $\max_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|=f_n\left(\pm\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{n^2}$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{en^2}=\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса рассматриваемый ряд сходится равномерно, что и требуется.

Теорема 4.4. (О почленном переходе к пределу). *Если функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* *к* $S(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = c_n$, *тогда и сумма* $S(x)$ *имеет предел* $\lim\limits_{x\to x_0} S(x)$, *причем*

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n ,$$

т.е. символы предела и суммирования можно переставлять местами (*или, как говорят, к пределу можно переходить почленно*).

Доказательство. Докажем сначала сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. В силу критерия Коши, примененного к функциональному ряду (4), для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$, всех натуральных p и каждого выполняется соотношение

$$\left|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon .$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$ при фиксированных n и p получим

$$\left|c_{n+1} + \ldots + c_{n+p}\right| \le \varepsilon < 2\varepsilon .$$

В силу Критерия Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.

Оценим теперь разность

$$S(x) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n ,$$

для всех $x \in E$ из достаточно малой окрестности точки x_0. В условиях теоремы для всякого $n \in \mathbb{N}$ справедливо тождество

$$S(x) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} c_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k .$$

Отсюда получаем для всех $x \in E$ неравенство

$$\left|S(x) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} c_n\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\right| .$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что для всех $x \in E$ будут справедливы соотношения

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку для конечных сумм предел суммы равен сумме пределов слагаемых, то для выбранного $\varepsilon > 0$ и n найдется такое $\delta > 0$, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} c_n\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $x \in \left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right) \cap E$. Из последних трех неравенств вытекает, что

$$\left|S(x) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right| < \varepsilon$$

для всех $x \in \left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right) \cap E$.

Это доказывает существование предела $\lim\limits_{x \to x_0} S(x)$ и справедливость теоремы.

Теорема 4.5. (О почленном интегрировании). *Пусть $u_n(x)$ непрерывны в E, пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в E. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$ сходится к $\int_a^b S(x)dx$, где $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, то есть функциональный ряд можно почленно интегрировать.*

Заметим, что суть теоремы содержится в формуле

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в E, то его сумма $S(x)$ непрерывна (теорема о непрерывности суммы ряда). Положим

$S^* = \int\limits_a^b S(x)dx$ и $\int\limits_a^b u_n(x)dx = u_n^*$. Составим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)dx$ и покажем, что он сходится к $\int\limits_a^b S(x)dx.$ Обозначим частичную сумму $S_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_a^b u_k(x)dx = \int\limits_a^b S_n(x)dz.$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в E, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in E.$$

Оценим разность $\left|S^* - S_n^*\right|$. Имеем

$$\left|S^* - S_n^*\right| = \left|\int\limits_a^b S(x)dx - \int\limits_a^b S_n(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b \left(S(x) - S_n(x)\right)dx\right| \le$$

$$\int\limits_a^b \left|S(x) - S_n(x)\right|dx < \int\limits_a^b \varepsilon\, dx = \varepsilon\left(b - a\right),$$

что и доказывает требуемое утверждение.

Пример 4.12 Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

Данный ряд получается путем почленного интегрирования ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4} = 1 + x^4 + x^8 + \ldots + x^{4n-4} + \ldots$$

Этот ряд равномерно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих условию $x^4 < 1$, т. е. при всех значениях x в интервале $|x| < 1$. Для каждого значения x в интервале $(-1{,}1)$ сумма ряда равна $\frac{1}{1 - x^4}$ (сумма убывающей геометрической прогрессии со знаменателем x^4).

Так как рассматриваемый ряд получен путем почленного интегрирования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{4n-4}$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^{4n-4}dx = x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots,$$

то сумма $S(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$ будет равна интегралу от суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n-4}$:

$$S(x)=\int_0^x\frac{dx}{1-x^4}=\int_0^x\frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}dx=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^x\frac{x^2dx}{(1-x^2)(1+x^2)}=$$

$$=\operatorname{arctg} x\,\Big|_0^x+\int_0^x\frac{(x^2+1)-1}{(1-x^2)(1+x^2)}dx=\operatorname{arctg} x+\int_0^x\frac{dx}{1-x^2}-\int_0^x\frac{dx}{1-x^4}=$$

$$=\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_0^x-\int_0^x\frac{dx}{1-x^4},$$

т. е. получено уравнение относительно искомого интеграла. Перенося $\int\limits_0^x\frac{dx}{1-x^4}$ в левую часть и разделив на 2, найдем

$$S(x)=\int_0^x\frac{dx}{1-x^4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|,\ x\in(-1,1).$$

Пример 4.13. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ допускает почленное интегрирование на отрезке $[-2,3]$ и написать полученный при этом числовой ряд.

Члены ряда непрерывны на отрезке $[-2,3]$ и ряд сходится равномерно на этом отрезке, так как имеет мажорантный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, следовательно, по предыдущей теореме его можно почленно интегрировать, то есть

$$\int_{-2}^{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-2}^{3}\frac{\sin nx}{2^n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\int_{-2}^{3}\sin nxdnx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\left(\cos 2n-\cos 3n\right).$$

Теорема 4.6. (О почленном дифференцировании). *Пусть* $u_n(x), u_n{}'(x)$ *непрерывны в* E. *Пусть ряд* $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится в* E, *а ряд* $\sum_{m=1}^{\infty} u_n{}'(x)$ *равномерно сходится в* E. *Тогда ряд* $S(x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ *можно почленно дифференцировать, причем*

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{m=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Доказательство. Так как ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, то его сумма $S^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ – непрерывная функция (теорема о непрерывности суммы ряда). Ее можно интегрировать, применяя теорему о почленном интегрировании.

$$\int_a^x S^*(t)dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n' dt = \sum_{n=1}^{\infty} \big(u_n(t) - u_n(a)\big) = S(x) - S(a)$$

Дифференцируя, получим $S^*(x) = S'(x)$, то есть

$$S^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'.$$

Пример 4.14 Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n nx^{n-1}$

Нетрудно заметить, что данный ряд получается путем почленного дифференцирования ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

Этот ряд равномерно сходится для $|x| < 1$, так как в этом интервале ряд будет являться сходящейся геометрической прогрессией $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ с $|q| < 1|$.

Сумму этого ряда можно найти как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=-x$.

Таким образом, в интервале (–1,1) ряд определяет функцию $S(x)=\dfrac{1}{1-q}=\dfrac{1}{1+x}$, которая является суммой ряда, т. е.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

при $(-1<x<1)$.

Так как рассматриваемый ряд получен путем почленного дифференцирования ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ то сумма S^* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}$ будет равна производной от суммы ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, т.е.

$$S^*=S'(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=-\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Пример 4.15. Исследовать функцию $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ на дифференцируемость на промежутке $(-\infty,\infty)$. Применяя теорему о почленном дифференцировании, покажем, чтофункция f дифференцируема в каждой точке числовой прямой. При $x=0$ получаем сходящийся числовой лейбницевский ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, значит первое условие теоремы выполнено. Теперь возьмём произвольное фиксированное $x\in(-\infty,\infty)$ и выберем отрезок $[-r,r]$, содержащий эту точку. Покажем, что на этом отрезке ряд из производных сходится равномерно, а его члены непрерывны на $[-r,r]$.

Положим $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$. Тогда производная $f_n'(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}2x}{\left(n+x^2\right)^2}$ непрерывна на $[-r,r]$. Построим мажорантный ряд для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ на отрезке $[-r,r]$. Поскольку для всех $x\in[-r,r]$ справедливо неравенство $\left|f_n'(x)\right|=\dfrac{2|x|}{\left(n+x^2\right)^2}\le\dfrac{2r}{n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2r}{n^2}=2r\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на отрезке $[-r,r]$. Таким образом, выполнены все условия теоремы о почленном дифференцировании. Поэтому сумма ряда – функция f – дифференцируема на $[-r,r]$, а значит, и в выбранной точке x. Поскольку точка x выбиралась произвольно, то f дифференцируема на интервале $(-\infty,\infty)$.

Пример 4.16. Исследовать функцию $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n^3}}$ на дифференцируемость на промежутке $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$. В точке $x=\pi$ ряд сходится. Положим $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n^3}}$ и составим ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}}$.

Его члены непрерывны на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, и по признаку Дирихле ряд сходится равномерно на этом отрезке. Таким образом, условия теоремы 7.4. выполнены на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, и поэтому функция f дифференцируема на нём.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать существование предела и найти его

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to 2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$. 3) $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^{n+1}-x^n)$. 4) $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(x^n+1)}$.

5) $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$. 6) $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}xe^{-nx}$. 7) $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$. 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2^n+x^2}$.

Найти область существования и непрерывности суммы ряда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+x^4}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^4)^n}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n4^{n-1}x^n$. 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{\sqrt{n+1}}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^4+n^2}{n^3}$. 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{n^6+x^2}$. 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+n^2x^2)}$. 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n^4+4}$.

Найти область E определения суммы ряда и исследовать ее на дифференцируемость

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^5}}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^3e^{-nx}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2\ln^2(n+1)}$. 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+3)}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$. 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$. 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\,\frac{x}{n^2}$. 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^3x^2}}{n^3}$. 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{n^5}$.

Доказать интегрируемость ряда на отрезке

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$, [1,2]. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$, [0;2π]. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n$, [-1;0];

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin nx}{3^n}$, [0; π].

Доказать непрерывность суммы ряда на E.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 e^{n^4 x^4}}$, $E=(1,9)$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^6 x^2}\left(1+n^4\right)^{-1}$, $E=(0,\infty)$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x^2}{n^6+2}$, $E=(1,3)$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $E=(0,1)$. 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} \sin \frac{x^2}{n}$, $E=(0,7)$.

5. Степенные ряды

Важным частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды.

Определение 5.1. *Степенным рядом называется ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_o)^n + \ldots$$

Заметим, что степенной ряд заведомо сходится при $x = x_0$.

Теорема 5.1. (теорема Абеля).

1) *Пусть степенной ряд сходится в точке* $x_1 \neq x_0$. *Тогда он абсолютно сходится в интервале*

$$|x-x_0| < |x_1 - x_0|,$$

симметричном относительно x_0.

2) *Пусть степенной ряд расходится в точке* $x_1 \neq x_0$. *Тогда он расходится в области* $|x-x_0| > |x_1 - x_0|$.

Доказательство. Пусть степенной ряд сходится в точке $x_1 \neq x_0$, тогда числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_1 - x_0)^n$ сходится. Тогда по необходимому признаку сходимости ряда $a_n(x_1-x_0)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что

$$\forall n > N \quad \left| a_n (x_1 - x_0)^n \right| < \varepsilon .$$

Рассмотрим такое фиксированное x, что $|x-x_0| < |x_1 - x_0|$. Имеем

$$\left| a_n (x-x_0)^n \right| = \left| a_n \frac{(x-x_0)^n}{(x_1-x_0)^n} (x_1-x_0)^n \right| \le \left| a_n (x_1-x_0)^n \right| \frac{|x-x_0|^n}{|x_1-x_0|^n} \le \varepsilon\, q^n(x),$$

где $q(x)=\dfrac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}<1$ в области $|x-x_0|<|x_1-x_0|, \forall n>N$.

По первому признаку сравнения числовых знакоположительных рядов ряд $\sum_{m=0}^{\infty}|a_n||x-x_0|^n$ сходится в указанной области (сравнение с бесконечно убывающей геометрической прогрессией $\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon\, q^n, 0<q<1$). Следовательно, в области $|x-x_0|<|x_1-x_0|$ степенной ряд абсолютно сходится.

Пусть степенной ряд расходится в точке $x_1\neq x_0$. Рассмотрим все такие x, что $|x-x_0|>|x_1-x_0|$. Если бы ряд сходился в точке x, то он по предыдущему пункту доказательства сходился бы в точке x_1. Противоречие.

Замечание 5.1. Для каждой точки x *константа* $q(x)$ *своя*. Может не найтись константы, меньшей единицы и ограничивающей сверху константы $q(x)$ для всех точек области E.

Поэтому абсолютная сходимость есть, но *равномерной сходимости степенного ряда в области* E *не гарантируется.*

Если такая константа найдется, то гарантируется равномерная сходимость ряда.

Рассмотрим *монотонно убывающую* последовательность $\{|x_k-x_0|\}$, такую, что в точке x_k степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x_k-x_0)^n$ *расходится.* Если выбрать $x_k=x_0$, то степенной ряд будет сходиться (ряд из нулей), поэтому рассматриваемая последовательность ограничена снизу нулем. По теореме Вейерштрасса монотонно убывающая, ограниченная снизу числовая последовательность имеет предел. То есть существует $R=\lim_{k\to\infty}|x_k-x_0|$.

Определение 5.2. *Такое число R называется радиусом сходимости степенного ряда.*

Следовательно, степенной ряд (по теореме Абеля) абсолютно сходится в интервале $|x-x_0|<R$ сходимости степенного ряда.

Зафиксируем некоторое значение x и запишем ряд из модулей членов степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n||x-x_0|^n$. Это – знакоположительный числовой ряд. Применим к нему признак Даламбера или радикальный признак Коши.

Применяя признак Даламбера, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x-x_0|^{n+1}}{|a_n||x-x_0|^n}=|x-x_0|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1.$$

Отсюда

$$|x-x_0|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

Поэтому

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Применяя радикальный признак Коши, имеем

$$|x-x_0|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1.$$

Отсюда

$$|x-x_0|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Значит

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Так определяется радиус сходимости степенного ряда.

Затем исследуется сходимость ряда на границе интервала сходимости, в точках $x = x_0 - R, x = x_0 + R.$ Эти точки подставляются в исходный ряд, ряд становится обычным числовым рядом и исследуется стандартными методами для числовых рядов.

Пример 5.1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-3)^n}{n\,5^n}$. Составим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(-1)^n||(x-3)^n|}{n\,5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-3|^n}{n\,5^n}$$

и применим радикальный признак Коши. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|}{\sqrt[n]{n}} < 1.$$

Отсюда $|x-3| < 5$. Значит, радиус сходимости $R = 5$, интервал сходимости $(-2,8)$. Исследуем сходимость ряда на границе, подставляя точки $x = -2$ и $x = 8$, в исходный ряд.

В точке $x = -2$ имеем ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-5)^n}{n\,5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, он расходится.

В точке $x = 8$ имеем ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(5)^n}{n\,5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ – сходящийся (по признаку Лейбница) знакочередующийся ряд.

Область сходимости исходного ряда $(-2,8]$.

Теорема 5.2. *Степенной ряд равномерно сходится внутри интервала сходимости.*

Доказательство. Пусть $|x - x_0| < R_1 < R$. Выберем $R_2 : R_1 < R_2 < R$, например $R_2 = \frac{1}{2}(R_1 + R)$. На интервале $|x - x_0| < |x_1 - x_0| = R_2$ и в точке x_1 степенной ряд сходится абсолютно, так как этот интервал лежит внутри интервала сходимости.

Тогда точно так же, как в доказательстве теоремы Абеля оценим

$$\left|a_n(x-x_0)^n\right| = \left|a_n \frac{(x-x_0)^n}{(x_1-x_0)^n}(x_1-x_0)^n\right| \le \left|a_n(x_1-x_0)^n\right| \frac{|x-x_0|^n}{|x_1-x_0|^n} \le \varepsilon\, q^n,$$

где $q = \dfrac{R_1}{R_2} < 1$ в области $|x-x_0| < R_1 < R_2 = |x_1-x_0|$ для всякого $n > N$ (отношение $\dfrac{R_1}{R_2}$ не зависит от x).

Тогда в области $|x-x_0| < R_1$ степенной ряд будет сходиться равномерно по признаку Вейерштрасса.

Следствие 5.1. *Внутри интервала сходимости справедливы теоремы о непрерывности суммы ряда, о почленном интегрировании и дифференцировании ряда.*

Теорема 5.3. *При почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда его радиус сходимости не меняется.*

Доказательство. Рассмотрим ряд из модулей членов степенного ряда (это – знакоположительный числовой ряд в конкретной точке) и определим радиус сходимости по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x-x_0|^{n+1}}{|a_n||x-x_0|^n} = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1.$$

Отсюда

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

Продифференцируем почленно степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n \left(x-x_0\right)^n$, перейдем к ряду из модулей и найдем радиус сходимости по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|a_{n+1}||x-x_0|^{n+1}}{n|a_n||x-x_0|^n} = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1.$$

Отсюда

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

Таким образом, при почленном дифференцировании радиус сходимости степенного ряда не меняется. Он не меняется и при почленном интегрировании, иначе он изменился бы при почленном дифференцировании.

Задачи для самостоятельного решения

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ найти радиус, интервал сходимости и исследовать на сходимость, абсолютную сходимость в концах интервала сходимости.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)!}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)(n+6)}{(2n)!} x^{2n+1}$. 4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(1+4n)5^n}}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2n+3}{3n^2+4} x^{2n+1}$. 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} (x+1)^n$. 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}$. 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n+2}} (x+4)^n$.

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)(x+1)^n$. 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{n^2} (x-1)^{n^2}$. 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{n^n}$. 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$.

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^n (x+3)^n$.

Используя различные приемы (дифференцирование, интегрирование и др.) найти сумму рядов и указать области их сходимости

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)x^{2n-1}}{3n-1}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (n+1)x^n}{3^n}$. 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{(4n-1)(4n+3)}$. 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+x^2)^{n+1}}$. 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-1)^{n+1}}{n+1}$. 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1-2x)^n}$.

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+x^2)^{n+1}}$. 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos^{n+1}x}{n(n+1)}$. 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n!}$. 13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln^n x}{2^n n!}$. 15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3 x^n}{(n+1)!}$. 16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$. 17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!}x^{2n}$.

6. Ряд Тейлора

6.1. Определения и основная теорема

Определение 6.1. *Рядом Тейлора функции* $f(x)$ *называется степенной ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

(*предполагается, что функция* $f(x)$ *является бесконечно дифференцируемой*).

Определение 6.2. *Рядом Маклорена называется ряд Тейлора при* $x_0 = 0$*, то есть ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Теорема 6.1. *Степенной ряд является рядом Тейлора для своей суммы*.

Доказательство. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ и степенной ряд сходится в интервале $|x-x_0| < R$. Подставим в разложение $x = x_0$, получим $f(x_0) = a_0$.

Так как степенной ряд сходится равномерно внутри интервала сходимости, мы можем его дифференцировать почленно. Полученный ряд будет сходиться в том же интервале, так как радиус сходимости при дифференцировании не меняется. Его вновь можно дифференцировать почленно и т.д. Вычислим коэффициенты в степенных рядах, полученных почленным дифференцированием. $f'(x_0) = a_1$,

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},\ f''(x_0)=2\,1\,a_2,\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},$$

$$f'''(x)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3},\ f'''(x_0)=3\,2\,1\,a_3,\ a_3=\frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Продолжая этот процесс, получим $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Это – коэффициенты ряда Тейлора. Поэтому степенной ряд есть ряд Тейлора.

Следствие 6.1. *Разложение функции в степенной ряд единственно.*

Доказательство. По предыдущей теореме коэффициенты разложения функции в степенной ряд определяются однозначно, поэтому разложение функции в степенной ряд единственно.

6.2. Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций

Запишем разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций, вычисляя коэффициенты разложения по формуле $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, где $x_0=0$.

1. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Как уже не раз отмечалось, это сумма геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ |x|<1.$$

Выпишем несколько разновидностей этого ряда. Заменой x на $-x$ получим

$|x| < 1.$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n ,$$

x

При замене   на $\pm x^2$, получаем

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} ,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} .$$

Область сходимости всех этих рядов одна и та же: $|x| < 1$.

2. $f(x) = e^x$. Все производные этой функции в точке $x = 0$ равны $e^x\big|_{x=0} = 1$, поэтому ряд имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Область сходимости этого ряда – вся числовая ось, поэтому $u_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ для всех x. Как следствие, остаточный член формулы Тейлора $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi} = u_{n+1}(x) \cdot e^{\xi} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Поэтому ряд сходится к $f(x) = e^x$ в любой точке x.

3. $f(x) = \sin x$. Здесь

$$f(0) = 0,\ f'(x) = \cos x,\ f'(0) = 1,\ f''(x) = -\sin x,\ f''(0) = 0,\ f'''(x) = -\cos x,\ f'''(0) = -1,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(5)}(x) = \cos x,\ f^{(5)}(0) = 1.$$

Дальше производные периодически повторяются. Ряд Маклорена имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Этот ряд абсолютно сходится при всяком x

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} \underset{n\to\infty}{\to} 0 ,$$

и его сумма действительно равна $f(x)=\sin x$. Остаточный член формулы Тейлора имеет вид $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$, где $f^{(n+1)}(\xi)=\pm\cos\xi$ или $f^{(n+1)}(\xi)=\pm\sin\xi$ – ограниченная функция, а $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\underset{n\to\infty}{\to}0$ (это общий член предыдущего разложения).

4. $f(x)=\cos x$. Это разложение можно получить, как и предыдущие, последовательным вычислением производных, но мы поступим по-другому. Почленно продифференцируем предыдущий ряд:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Сходимость к функции на всей оси следует из теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда.

5. Следующие разложения получаются из разложения функции e^x

$$shx=x+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$chx=1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

6. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$. Ряд для этой функции называется *биномиальным рядом.* Вычислим производные.

$$f(0)=1,\ f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f'(0)=\alpha,\ f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\ f''(0)=\alpha(\alpha-1),$$

$$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},\ f'''(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2);\ldots$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1);$$

Ряд Маклорена имеет вид

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+..., \ |x|<1,$$

$$\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}.$$

Ищем интервал сходимости:

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\frac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(\alpha-n)|}{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)|}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\cdot|x|=\frac{|\alpha-n|}{n+1}\cdot|x|\underset{n\to\infty}{\to}|x|,$$

следовательно, интервал сходимости есть $|x|<1$. Исследование остаточного члена и поведение ряда на концах интервала сходимости проводить не будем; оказывается, что при $\alpha\geq 0$ ряд абсолютно сходится в обеих точках $x=\pm 1$, при $-1<\alpha<0$ ряд условно сходится в точке $x=1$ и расходится в точке $x=-1$, при $\alpha\leq -1$ расходится в обеих точках.

7. $f(x)=\ln(1+x)$. Здесь воспользуемся тем, что $\ln(1+x)=\int\limits_0^x\frac{dx}{1+x}$. Так как

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...,$$

то, после почленного интегрирования,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Область сходимости этого ряда – полуинтервал $(-1<x\leq 1]$, сходимость к функции во внутренних точках следует из теоремы о почленном интегрировании степенного ряда, в точке $x=1$ – из непрерывности функции, и суммы степенного ряда во всех точках, сколь угодно близких к $x=1$ слева. Отметим, что взяв $x=1$, найдём сумму ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$$

8. Почленно интегрируя ряд

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^n x^{2n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

получим разложение для функции $y = arctgx$.

9. Выпишем разложение функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ по формуле биномиального ряда с $\alpha = -1/2$:

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(-x^2\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\frac{\left(-x^2\right)^2}{2!} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdot\frac{\left(-x^2\right)^3}{3!} - \ldots =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{x^4}{2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\cdot\frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\cdot\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}.$$

Знаменатель $2^n \cdot n!$ представлен как

$$2^n \cdot n! = (2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot\ldots\cdot(2\cdot n) = (2n)!!,$$

двойной факториал $k!!$ означает произведение всех натуральных чисел той же чётности, что и k, не превосходящих k. Разложение сходится к функции при $|x| < 1$. Почленно интегрируя его от 0 до x, получим

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{x^5}{2!\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\cdot\frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)} + \ldots =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Оказывается, что этот ряд сходится к функции на всём отрезке $|x| \le 1$; при $x = 1$ получаем ещё одно красивое представление числа π:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}.$$

Пусть записано разложение функции в степенной ряд. Возникает вопрос, всегда ли это разложение (степенной ряд) сходится именно к этой функции, а не к какой-либо другой.

Пример 6.1. Приведём пример, когда ряд Маклорена функции $f(x)$ сходится не к $f(x)$, а к другой функции. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x\neq 0; \\ 0, \qquad x=0. \end{cases}$$

Покажем, что все производные этой функции в точке $x=0$ равны нулю. При $x\neq 0$ $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$. $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\left|t=\dfrac{1}{x}\right|=\lim\limits_{t\to\infty} 2t^3e^{-t^2}=0$. Такие неопределённости придётся раскрывать при вычислении любой производной; заменой $t=\dfrac{1}{x}$ они сводятся к неопределённостям, содержащим степенные и показательные функции, значение предела во всех случаях определяется пределом показательной функции и равно нулю. Значение производной в точке $x=0$ находим по определению производной:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}=\left|t=\frac{1}{x}\right|=\lim_{t\to\infty} te^{-t^2}=0.$$

Итак, производная $f'(x)$ непрерывна в точке $x=0$ и равна нулю.

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=\left|t=\frac{1}{x}\right|=\lim_{t\to\infty} 2t^4e^{-t^2}=0 \text{ и т.д.}$$

Так доказывается, что все производные в точке $x=0$ равны нулю. Как следствие, все коэффициенты ряда Тейлора этой функции равны нулю, и на всей числовой оси ряд сходится к функции, тождественно равной нулю, а не к $f(x)$.

Теорема 6.2. *Для того чтобы ряд Тейлора сходился к той функции, по которой он построен, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при* $n\to\infty$.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n$$

Необходимость. Обозначим S_n – частичную сумму ряда Тейлора.

$$S_n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Если ряд Тейлора сходится к $f(x)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x) - S_n) = 0$. Но по формуле Тейлора $f(x) - S_n = R_n$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Достаточность. Если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x) - S_n) = 0$, а S_n – частичная сумма ряда Тейлора.

Поэтому ряд Тейлора сходится именно к функции $f(x)$.

Теорема 6.3. *Пусть все производные функции $f(x)$ ограничены в совокупности одной константой.* $\left(\left|f^n(x)\right| < L, n \in \mathbb{N}\right)$. *Тогда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$.*

Доказательство. Оценим остаточный член формулы Тейлора

$$\frac{\left|f^n(\theta)\right|}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1} < L\frac{\left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

так как показательная функция растет медленнее, чем $n!$. Поэтому (по предыдущей теореме) ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$.

В качестве примера применения теоремы рассмотрим разложение в ряд Маклорена функций $\sin x$ и $\cos x$. Эти ряды сходятся к функциям, так как их производные ограничены в совокупности единицей на всей оси.

В разложении функции e^x на отрезке $[a,b]$ все производные функции ограничены константой b, поэтому ряд для функции e^x сходится к ней на любом конечном отрезке.

Ряды для функций shx, chx можно получить линейной комбинацией экспонент, следовательно, ряды для этих функций сходятся к ним на всей оси.

Рассмотрим разложение в ряд функции $(1 + x)^\alpha$. Предположим, что ряд сходится к функции $S(x)$. Можно, дифференцируя ряд почленно, установить справедливость соотношения $(1 + x)S'(x) = \alpha\, S(x)$ (выведите его в качестве упражнения). Решая это дифференциальное уравнение, получим $S(x)=(1+x)^{\alpha}$.

Задачи для самостоятельного решения

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$.

1) $f(x)=x^3\cdot arctgx$. 2) $f(x)=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{x^2}$. 3) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$. 4) $f(x)=\cos\dfrac{2x^3}{3}$.

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. 6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$. 7) $f(x)=e^{-2x^2}$. 8) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$.

9) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$. 10) $f(x)=e^{-x^4}$. 11) $f(x)=\dfrac{\cos x^2}{x}$. 12) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$.

13) $f(x)=x\cos\sqrt{x}$. 14) $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$. 15) $f(x)=\dfrac{\cos x^4}{x^2}$. 16) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$.

17) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$.

6.3. Применение степенных рядов

Большинство задач, в которых требуется разложить элементарную функцию в ряд по степеням $x-x_0$, решается применением стандартных разложений. К счастью, любая основная элементарная функция имеет свойство, которое позволяет это сделать. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 6.2. Разложить функцию e^{5x+6} по степеням $x-7$. Имеем

$$e^{5x+6}=e^{5(x-7)+35+6}=e^{41}\cdot e^{5(x-7)}=e^{41}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n(x-7)^n}{n!}.$$

Ряд сходится для всех $x\in\mathbb{R}$.

Пример 6.3. Разложить функцию $\ln(5x+6)$ по степеням $x-7$. Имеем

$$\ln(5x+6)=\ln[5(x-7)+41]=\ln\left[41\left(1+\frac{5(x-7)}{41}\right)\right]=\ln 41+\ln\left(1+\frac{5(x-7)}{41}\right)=$$

$$=\ln 41+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5^n(x-7)^n}{41^n\cdot n}.$$

Область сходимости: $-1<\frac{5(x-7)}{41}\leq 1$. Отсюда $-\frac{6}{5}<x\leq\frac{76}{5}$.

Пример 6.4. Разложить функцию $\sin(5x+6)$ по степеням $x-7$. Имеем

$$\sin(5x+6)=\sin[5(x-7)+41]=\cos 41\sin[5(x-7)]+\sin 41\cos[5(x-7)]=$$

$$=\cos 41\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+1}(x-7)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sin 41\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n}(x-7)^{2n}}{(2n)!}.$$

Ряд сходится для всех $x\in\mathbb{R}$.

Пример 6.5. Разложить функцию $\sqrt[3]{(5\boldsymbol{x}+6)^4}$ по степеням $\boldsymbol{x}-7$. Имеем

$$\sqrt[3]{(5x+6)^4}=(5x+6)^{4/3}=[41+5(x-7)]^{4/3}=\sqrt[3]{41^4}\cdot\left[1+\frac{5}{41}(x-7)\right]^{4/3}=$$

$$=\sqrt[3]{41^4}\cdot\left(1+\frac{4}{3}\frac{5}{41}(x-7)+\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}-1\right)\frac{5^2}{41^2}\frac{(x-7)^2}{2!}+\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{4}{3}-2\right)\frac{5^3}{41^3}\frac{(x-7)^3}{3!}+\ldots\right)=$$

$$=\sqrt[3]{41^4}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4\cdot 1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-7)}{123^n}\frac{5^n(x-7)^n}{n!}\right).$$

Ряд сходится при $-\frac{6}{5}\leq x\leq\frac{76}{5}$.

Пример 6.6. Разложить функцию $\frac{1}{x^2+5x+6}$ по степеням $x-7$. Если рациональная дробь не является простой, она сначала представляется в виде суммы простых дробей:

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3};\ A=1,\ B=-1\Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}.$$

Затем:

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{9+(x-7)}-\frac{1}{10+(x-7)}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-7}{9}}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-7}{10}}=$$

$$=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-7)^n}{9^n}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-7)^n}{10^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{9^{n+1}}-\frac{1}{10^{n+1}}\right](x-7)^n,$$

где

$$\begin{cases}-1<\dfrac{x-7}{9}<1\\ -1<\dfrac{x-7}{10}<1\end{cases}\Leftrightarrow -2<x<16.$$

Естественно, такой подход неприменим, например, для разложения функции $e^{\frac{x}{x+1}}$ по степеням x. Здесь, если надо получить несколько первых членов ряда Тейлора, проще всего найти значения в точке $x=0$ требуемого количества первых производных.

Вычисление значений функций

Идея таких вычислений простая. Пусть известно значение функции в точке x_0, и функция разлагается в окрестности точки x_0 в ряд Тейлора. Тогда значение функции в точке x_1, которое надо найти, равно

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_1-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1-x_0)^n+R_n(x_1)=$$
$$=S_n(x_1)+R_n(x_1),$$

и принимается $f(x_1)\approx S_n(x_1)$. Естественно, необходимо гарантировать, что погрешность такого приближения не превышает заданной величины ε. Погрешность равна остатку ряда после n-го члена (или остаточному члену формулы Тейлора), поэтому необходимо строить оценку сверху для $R_n(x_1)$. При оценке $R_n(x_1)$ принципиально отличны два случая. Если остаток – знакочередующийся ряд, то $R_n(x_1)$ просто оценивается по своему первому члену. Если остаток не является знакочередующимся рядом, то необходимо оценивать всю его сумму. Обычно в этом случае надо подобрать какой-либо мажорантный ряд с известной суммой, например, оценить сверху члены ряда членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии и оценку суммы ряда проводить по сумме прогрессии.

Пример 6.7. Вычислить $arctg 0,3$ с точностью $\varepsilon = 0.01$. Имеем

$$arctg\ x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad arctg 0,3 = 0,3 - \frac{(0,3)^3}{3} + \frac{(0,3)^5}{5} + \ldots$$

По следствию из признака Лейбница остаток числового знакочередующегося ряда оценивается модулем первого отброшенного члена

$$|R_n| \le \frac{(0,3)^{n+1}}{n+1} < 0,01.$$

Из этого неравенства найдем n, $n = 2$. $arctg\ 0,3 \approx 0,3$.

Пример 6.8. Вычислить sin 10° с точностью до 10^{-5}.

Решение. Переведя градусную меру в радианную, получим

$$10° = \frac{\pi}{18} \approx 0,1745.$$

Учитывая разложение синуса в степенной ряд, получим

$$\sin 10° = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n-1}.$$

Этот ряд является рядом Лейбница, поэтому принимая за приближенное значение sin10° сумму первых двух членов разложения, сделаем ошибку Δ, по абсолютной величине меньшую третьего члена:

$$|\Delta| < \frac{1}{120} \cdot (0,1745)^5 < \frac{(0,2)^5}{120} < 0,0001.$$

Таким образом,

$$\sin 10° = 0,1745 - \frac{1}{6} \cdot (0,1745)^3 = 0,17361.$$

Пример 6.9. Вычислить $\sqrt[10]{1027}$ с точностью до 0,0001.

Приближенное вычисление корней производится с помощью биноминального ряда

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, (|x|<1)$$

Имеем

$$\sqrt[10]{1027} = \left(2^{10}+3\right)^{\frac{1}{10}} = 2\left(1+\frac{3}{2^{10}}\right)^{\frac{1}{10}} =$$

$$= 2 + \frac{3}{10\cdot 2^9} + \frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\cdot 3^2}{2!\cdot 2^{19}} + \frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\left(\frac{1}{10}-2\right)\cdot 3^3}{3!\cdot 2^{29}} + \ldots$$

Полученный ряд является рядом Лейбница, и значит, погрешность от отбрасывания членов, начиная с третьего, по абсолютной величине меньше: $\frac{3^4}{10^2\cdot 2^{20}} < 0{,}0001$.

Сохраняя поэтому только два члена разложения, будем иметь

$$\sqrt[10]{1027} = 2 + \frac{3}{10\cdot 2^9} = 2{,}0006.$$

Вычисление интегралов.

Пример 6.10. Вычислить $\int\limits_{0,1}^{0,3}\frac{1}{1+x}dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$. Имеем

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3\ldots$$

$$\int\limits_{0,1}^{0,3}\frac{1}{1+x}dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\Big|_{0,1}^{0,3} =$$

$$= \left(0{,}3 - (0{,}3)^2 + (0{,}3)^3 + \ldots\right) - \left(0{,}1 - (0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 + \ldots\right),$$

$$\left(|R_{1n}| \le (0{,}3)^{n+1}\right), \quad |R_{2n}| \le (0{,}1)^{n+1}, \quad (0{,}3)^{n+1} + \left(0{,}1\right)^{n+1} < 0{,}01,$$

$$n = 3, \quad (0{,}3)^4 + (0{,}1)^4 = 0{,}0082 < 0{,}01$$

$$\int\limits_{0,1}^{0,3} \frac{1}{1+x}\,dx = \left(0{,}3 - (0{,}3)^2 + (0{,}3)^3 + \ldots\right) - \left(0{,}1 - (0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 + \ldots\right) \approx 0{,}146.$$

Пример 6.11. Как известно, интеграл $\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$ аналитически не берётся. Это специальная функция, называемая интегральным синусом и обозначаемая $\mathrm{si}x$.

Получим разложение этой функции в степенной ряд.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!},$$

почленно интегрируем:

$$\mathrm{si}x = \int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}.$$

Ряд сходится к $\mathrm{si}x$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Теперь легко вычислить значение этой функции в любой точке. Пусть, например, надо найти $\mathrm{si}0{,}5$ с погрешностью $\varepsilon \le 10^{-4}$. Имеем

$$\mathrm{si}0{,}5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 3!\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 5!\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 7!\cdot 2^7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+1)!\cdot 2^{(2n+1)}} + \ldots.$$

Ряд знакочередующийся, первый член, меньший 10^{-4}, третий, поэтому

$$\mathrm{si}\,0{,}5 \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 3!\cdot 2^3} = 0{,}5 - 0{,}00694 = 0{,}4931.$$

Решение дифференциальных уравнений.

Пример 6.12. $y' = y^2 - x, \quad y(0) = 1$

1 способ. Пусть дана задача Коши: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Решение этой задачи в виде ряда Тейлора ищется так.

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + ...$$

Первые n коэффициентов ряда известны из начальных условий, остальные находятся последовательным дифференцированием уравнения.

В данном уравнении производится разложение в ряд Маклорена, так как начальное условие задано в нуле.

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4.$$

Подставляем разложения в правую и левую части уравнения $y' = y^2 - x$.

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5) - x =$$

$$= a_0^2 + a_1^2 x^2 + a_2^2 x^4 + 2a_0 a_1 x + 2a_0 a_2 x^2 + 2a_0 a_3 x^3 + 2a_0 a_4 x^4 + 2a_1 a_2 x^3 + 2a_1 a_3 x^4 - x.$$

Удерживаем в разложении члены четвертых степеней, в коэффициентах при x^5 будут

$1 \qquad a_1 = a_0^2 = 1$

$x \qquad 2a_2 = 2a_0 a_1 - 1$

$x^2 \qquad 3a_3 = a_1^2 + 2a_0 a_2$

$x^3 \qquad 4a_4 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2$

$x^4 \qquad 5a_5 = a_2^2 + 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3$

Отсюда $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{7}{12}$,

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4.$$

2 способ. Представим $y(x)$ в виде ряда Тейлора.

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{1V}(0)}{4!}x^4 + ...$$

$y(0) = 1$

$y'(x) = y^2(x) - x, \quad y'(0) = y^2(0) - 0 = 1$

$y''(x) = 2yy' - 1, \quad y''(0) = 2 - 1 = 1$

$y'''(x) = 2\left(y'\right)^2 + 2yy'', \quad y'''(0) = 4$

$y^{1V}(x) = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''', \quad y^{1V}(0) = 4 + 2 + 8 = 14$

Отсюда

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4.$$

Пример 6.13. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$. Из уравнения находим

$$y'(0) = 0^2 + y^2(0) = 1.$$

Дифференцируем уравнение:

$$y'' = 2x + 2y \cdot y',\ y''(0) = 2 \cdot 0 + 2y(0) \cdot y'(0) = 2.$$

Далее дифференцируем уравнение и находим значение производной в точке $x_0 = 0$: $y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy''$, $y'''(0) = 2 + 2 + 2 \cdot 2 = 8$,

$$y^{(4)} = 6y \cdot y'' + 2y \cdot y''',\ y^{(4)}(0) = 12 + 16 = 28.$$

Так можно вычислить производные любого порядка. Решение задачи Коши: $y(x) = 1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{28}{4!}x^4 + \ldots = 1 + x + x^2 + \frac{7}{6}x^3 + x^4 + \ldots$.

Пример 6.14. $y'' = xy$, $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$. Находим: $y''(0) = 0$;

$$y''' = y + xy',\ y'''(0) = 0;$$

$$y^{(4)} = 2y' + xy'',\ y^{(4)}(0) = 2;\ y^{(5)} = 3y'' + xy''',$$

$$y^{(5)}(0) = 0;\ y^{(6)} = 4y''' + xy^{(4)},\ y^{(6)}(0) = 0;$$

$$y^{(9)} = 7y^{(6)} + xy^{(7)},\ y^{(9)}(0) = 0;$$

$$y^{(7)} = 5y^{(4)} + xy^{(5)},\ y^{(7)}(0) = 2 \cdot 5;\ y^{(8)} = 6y^{(5)} + xy^{(6)},\ y^{(8)}(0) = 0;$$

$$y^{(10)} = 8y^{(7)} + xy^{(8)},\ y^{(10)}(0) = 2 \cdot 5 \cdot 8.$$

Закономерность понятна. Производные порядка $3n-1$ и $3n$ равны нулю, производная порядка $3n+1$ равна $2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (3n-1)$, поэтому

$$y = x + \frac{2\cdot x^4}{4!} + \frac{2\cdot 5\cdot x^7}{7!} + \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot x^{10}}{10!} + \ldots + \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)\cdot x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \ldots .$$

С помощью признака Даламбера легко убедится, что этот ряд сходится для всех $x \in \mathbb{R}$, следовательно, даёт решение задачи Коши на всей числовой оси.

Задачи для самостоятельного решения

Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный интеграл.

1) $\int\limits_0^{0,25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$. 2) $\int\limits_0^{1} arctg\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$. 3) $\int\limits_0^{0,2} \sqrt{x}e^{-x}dx$. 4) $\int\limits_0^{0,5} \frac{arctgx}{x}dx$.

5) $\int\limits_0^{0,2} \sqrt{x}\cos x dx$. 6) $\int\limits_0^{0,5} \ln\left(1+x^3\right)dx$. 7) $\int\limits_0^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. 8) $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}dx$. 9) $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$.

10) $\int\limits_0^{1} \sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}}dx$. 11) $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x}dx$. 12) $\int\limits_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}dx$. 13) $\int\limits_0^{0,5} x^2\cos 3x dx$.

14 $\int\limits_0^{0,5} \ln\left(1+x^2\right)dx$. 15) $\int\limits_0^{0,4} \sqrt{x}e^{-\frac{x}{4}}dx$.

Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена разложения).

1) $y' = xy + e^y,\ y(0) = 0$. 2 $y' = x^2y^2 + 1,\ y(0) = 1$. 3) $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = \frac{1}{2}$.

4) $y' = x^3 + y^2,\ y(0) = \frac{1}{2}$. 5) $y' = x + y^2,\ y(0) = -1$. 6) $y' = x + x^2 + y^2,\ y(0) = 1$.

7) $y' = e^x - y^2,\ y(0) = 0$. 8) $y' = x + y + y^2,\ y(0) = 1$. 9) $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1$.

10) $y' = x^2y^2 + y\sin x,\ y(0) = \frac{1}{2}$. 11) $y' = 2y^2 + ye^x,\ y(0) = \frac{1}{3}$.

12) $y' = e^{3x} + 2xy^2$, $y(0) = 1$. 13) $y' = x + e^y$, $y(0) = 0$.

14) $y' = y\cos x + 2\cos y$, $y(0) = 0$. 15) $y = x^2 + 2y^2$, $y(0) = 0{,}2$.

7. Ряд Фурье по тригонометрической системе функций (тригонометрический ряд Фурье)

7.1. Тригонометрическая система функций

Напомним, что множество комплексных чисел – это множество, обозначаемое символом $\mathbb{C}$, упорядоченных пар вещественных чисел (x, y) с операциями сложения

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

и умножения

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Отметим, что относительно введенного сложения и умножения на действительное число

$$c(x, y) = (cx, cy)$$

множество $\mathbb{C}$ можно рассматривать как двумерное вещественное пространство $\mathbb{R}^2$, т.е. – плоскость. Комплексное число вида $(x, 0)$ отождествляется при этом с вещественным x. Выбирая в качестве базиса в $\mathbb{R}^2$ систему $1 = (1,0)$ и $i = (0,1)$, приходим к алгебраической записи комплексного числа

$$z = (x, y) = x + iy.$$

Как обычно, символом $\overline{z}$ обозначается комплексно сопряженное к z и $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

В тригонометрической теории (комплексных) рядов Фурье исключительную роль играет комплексная экспонента e^{it}. Эта функция может быть определена любым из следующих эквивалентных способов

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

$$e^{it}=\lim_{n\to\infty}\left(1+i\frac{t}{n}\right)^n,$$

$$e^{it}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}.$$

Отметим, что это периодическая функция с периодом 2π и $\left|e^{it}\right|=1, t\in\mathbb{R}$. Когда аргумент t пробегает отрезок $[0,2\pi)$, точка e^{it} пробегает на комплексной плоскости единичную окружность в направлении против часовой стрелки. Как и вещественная экспонента, комплексная обладает свойством $e^{it}\cdot e^{is}=e^{i(s+t)}$.

Заметим, что $e^{int}, n\in\mathbb{Z}$, также периодична с наименьшим периодом $\frac{2\pi}{n}, n\neq 0$, так что число 2π является общим периодом для все этих экспонент. Если $n\neq 0$, то $e^{int}, n\in\mathbb{Z}$ является производной функции $\frac{e^{int}}{in}$, которая также имеет период 2π, так что

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}dt=\begin{cases}2\pi, n=0\\ 0, n=\pm1,\pm2,\ldots\end{cases} \tag{7.1}$$

Напомним также формулы Эйлера

$$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$$

Отметим, наконец, важные свойства периодических функций.

Лемма 7.1. *Если функция* $f(x)$ *имеет период* T, *то функция* $f(\alpha x)$ *имеет период* $\frac{T}{\alpha}$.

Доказательство. $f\left(\alpha\left(x+\frac{T}{\alpha}\right)\right)=f(\alpha x+T)=f(\alpha x)$.

Лемма 7.2. *Если функция* $f(x)$ *имеет период* T, *то для всякого действительного* c *имеет место равенство*

$$\int_{c}^{c+T}f(x)dx=\int_{0}^{T}f(x)dx.$$

Доказательство. В силу аддитивности интеграла

$$\int_c^{c+T} f(x)dx = \int_c^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{T+c} f(x)dx$$

Делаем замену переменных в последнем интеграле $z = x - T,\ dz = dx$.

$$\int_c^{c+T} f(x)dx = \int_c^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^c f(z)dz =$$

$$\int_c^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^c f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Доказанные свойства позволяют рассматривать тригонометрическую систему функций на любом отрезке длиной 2π (период $\cos nx, \sin nx$ равен $\frac{2\pi}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$), например *на отрезке* $[-\pi, \pi]$, при вычислениях интегралов от функций с периодом, кратным 2π, проводить интегрирование по любому отрезку длиной 2π.

Определение 7.1. *Тригонометрической системой функций называется система функций*

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

или e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$ *в комплексном случае.*

Определение 7.2. *Пусть* a_n *и* b_n *– две последовательности комплексных чисел. Тригонометрическим рядом называется ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что для $k \in \mathbb{N}$

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx},$$

где $c_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2}$ и $c_{-k} = \dfrac{a_k + ib_k}{2}$. Отсюда $a_k = c_k + c_{-k}$ и $b_k = i\left(c_k - c_{-k}\right)$.

Определение 7.3. *Пусть* c_n, $n \in \mathbb{Z}$*– последовательность комплексных чисел. Тригонометрическим рядом (в комплексной форме) называется ряд*

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},\ x \in \mathbb{R}$$

Переход от вещественной формы к комплексной и наоборот осуществляется пересчетом коэффициентов: $a_0 = c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$ и $b_k = i\left(c_k - c_{-k}\right)$.

Множество (комплекснозначных) непрерывных периодических с периодом 2π функций является комплексным векторным пространством: такие функции можно складывать и умножать на комплексные числа не выходя за рамки этого множества функций. Превратим это пространство в евклидово, введя в нем скалярное произведение, полагая

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Свойства 1)–3) скалярного произведения очевидны. Четвертое свойство является следствием непрерывности рассматриваемых функций. Действительно, если

$$\|f\|^2 = (f, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0,$$

то $f(x) \equiv 0$ именно благодаря своей непрерывности.

Обозначим это пространство (комплекснозначных) непрерывных периодических с периодом функций через $C_{2\pi}$.

Теорема 7.1. *Тригонометрическая система функций состоит из попарно ортогональных на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функций.*

Доказательство.

$$\left(\frac{1}{2}, \cos x\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos x dx = 0. \quad \left(\frac{1}{2}, \sin x\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin x dx = 0,$$

$$(\sin mx, \cos nx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)dx = 0,$$

Пусть $m \neq n$.

$$(\cos nx, \cos mx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)dx = 0,$$

$$(\sin mx, \sin nx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)dx = 0,$$

$$\left(e^{int}, e^{imt}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt = 0.$$

Теорема доказана.

Вычислим скалярные квадраты элементов тригонометрической системы.

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2},$$

$$(\cos nx,\cos nx)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx=\frac{1}{2\pi}\left(x+\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=1,$$

$$(\sin nx,\sin nx)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx=\frac{1}{2\pi}\left(x-\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=1.$$

Составим ряд Фурье по тригонометрической системе функций

$$S(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{int}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Коэффициенты Фурье определяются как

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n\in\mathbb{N}.$$

$$c_0=\frac{a_0}{2},\ c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\ c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2},\ n\in\mathbb{N}.$$

Если f – произвольная непрерывная периодическая с периодом 2π функция, то ее коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы $e_n=e^{int}$ равны

$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx.$$

Неравенство Бесселя принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx.$$

8.1. Сходимость тригонометрического ряда Фурье

Теорема 8.1. *Пусть тригонометрический ряд удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий*

$$\text{\textit{ряды}} \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}|b_n| \text{ \textit{сходятся;}}$$

$$\text{\textit{ряды}} \sum_{n=1}^{\infty}|c_n| \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}|c_{-n}| \text{ \textit{сходятся.}}$$

Тогда тригонометрический ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$ *к непрерывной периодической с периодом* 2π *функции* f, *причем*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

Доказательство. Эквивалентность условий теоремы следует из неравенств

$$|a_n| \le |c_n| + |c_{-n}|,\ |b_n| \le |c_n| + |c_{-n}| \text{ и } |c_n| \le \frac{|a_n| + |b_n|}{2},\ |c_{-n}| \le \frac{|a_n| + |b_n|}{2}.$$

Далее, в силу неравенства

$$\left|c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right| \le |c_n| + |c_{-n}|,$$

тригонометрический ряд имеет мажорантный сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|c_n| + |c_{-n}|\right)$, не зависящий от x. В силу признака Вейерштрасса, тригонометрический ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Поскольку члены тригонометрического ряда являются непрерывными периодическими функциями с периодом 2π, таковой будет и сумма ряда (в силу равномерной сходимости). Обозначим сумму ряда через $f(x)$:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \right).$$

В силу неравенства

$$\left(\left| c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \right| e^{ikx} \right) \le |c_n| + |c_{-n}|$$

Ряд

$$c_0 e^{-ikx} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \right) e^{-ikx}$$

равномерно сходится к функции $f(x)e^{-ikx}$, и этот ряд можно почленно интегрировать. В силу ортогональности тригонометрической системы все члены ряда при интегрировании по интервалу $[-\pi, \pi]$ обращаются в ноль, за исключением слагаемого с номером $n = k$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx = c_k , \ k \in \mathbb{Z}$$

Соотношения для a_k и b_k вытекают из равенств $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i\left(c_k - c_{-k}\right)$ и формул Эйлера.

Если коэффициенты c_n определяются соотношением

,

тогда ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Теперь необходимо сформулировать условия, при которых функция представляется рядом Фурье по тригонометрической системе функций.

Определение 8.1. *Ядром Дирихле называется функция*

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} .$$

Лемма 8.1. Ядро Дирихле $D_n(x)$ является непрерывной периодической с периодом 2π четной функцией равной

$$D_n(x)=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

причем

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx=1.$$

Доказательство.

$$D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}=e^{-inx}\sum_{j=0}^{2n}\left(e^{in}\right)^j=e^{-inx}\frac{1-e^{-i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}=$$

$$=e^{inx}\frac{e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\cdot\frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}x}-e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

откуда вытекает, также, свойство четности. Последнее равенство вытекает из (7.1).

Определим понятие свертки двух периодических функций. Пусть f и g – произвольные непрерывные периодические с периодом 2π функции. Их сверткой $f*g$ называется функция

$$f*g=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Очевидно, свертка $f*g$ – периодическая с периодом 2π и непрерывная функция:

$$f*g(x+2\pi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x+2\pi-t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,dt=f*g(x)$$

поскольку g периодична. Чтобы показать непрерывность, заметим, что g – равномерно непрерывна в том смысле, что для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что неравенство $|x_1-x_2|<\delta$ влечет $|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$.

В самом деле, фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta < \dfrac{\varepsilon}{M}$, где $M = \sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]} f(t)$.

Тогда при $|x - x_0| < \delta$

$$\left| f * g(x) - f * g(x_0) \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\big(g(x-t) - g(x_0 - t)\big)dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \left|\big(g(x-t) - g(x_0 - t)\big)\right| dt \le \frac{\varepsilon}{M} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \le \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon .$$

Теорема 8.2. *Пусть f и g – произвольные непрерывные периодические с периодом 2π функции. Тогда*

$$c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g),$$

где $c_n(f)$ – коэффициент Фурье соответствующей функции относительно ортонормированной системы экспонент $e_n(x) = e^{inx}$.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$f * e_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{in(x-t)} dt = e^{inx} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = c_n(f) e_n(x).$$

Тогда

$$\begin{gathered} c_n(f * g) = (f * g) * e_n(0) = f * (g * e_n)(0) = f * \big(c_n(g) * e_n\big)(0) = \\ = c_n(g)\, f * e_n(0) = c_n(g) c_n(f) \end{gathered}$$

Ядро Дирихле замечательно тем, что частичная сумма Фурье функции f является сверткой функции f с ядром Дирихле, как сразу следует из (7.1)

$$f * D_n = f * \sum_{k=-n}^{n} e_k = \sum_{k=-n}^{n} f * e_k = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k .$$

Для доказательства следующей теоремы потребуется часто применяемый результат:

Лемма 8.2. (Римана – Лебега). *Если функция f непрерывно дифференцируема в промежутке $[a,b]$, то*

$$\lim_{p\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x) \sin px dx = 0 .$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$\left|\int_a^b f(x)\sin px dx\right| = \left|-\frac{1}{p}\int_a^b f(x)d(\cos px)\right| =$$

$$\left|-\frac{1}{p}f(x)\cos px\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cos px dx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{p}\left(\left|f(b)\cos pb\right| + \left|f(a)\cos pa\right| + \int_a^b\left|f'(x)\cos px\right|dx\right) \le$$

$$\le \frac{1}{p}\frac{1}{p}\left(\left|f(b)\cos pb\right| + \left|f(a)\cos pa\right| + \int_a^b\left|f'(x)\right|dx\right) \to 0.$$

Теорема 8.3 (Дирихле). *Если функция* f *непрерывно дифференцируема и периодична с периодом* 2π, *то ряд Фурье сходится к функции* f *поточечно.*

Доказательство. Имеем

$$f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k = f(x) - f * D_n(x) =$$

$$= f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - f(t)\right)D_n(x-t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\frac{x-t}{\sin\frac{x-t}{2}}\sin\frac{(2n+1)(x-t)}{2}dt.$$

Последний интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$ согласно лемме Римана-Лебега ибо функции $\frac{f(x)-f(t)}{x-t}$ и $\frac{x-t}{\sin\frac{x-t}{2}}$ непрерывно дифференцируемы по t.

Теорема 8.4. (Дирихле). *Если функция f непрерывно дифференцируема и периодична с периодом 2π, то ряд Фурье сходится к функции f равномерно.*

Доказательство. Имеем

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\,\frac{e^{-int}}{-in} = \frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}dt = \frac{c_n(f')}{in}.$$

Из неравенства $2ab \le a^2 + b^2$ получаем

$$\left|c_n(f)\right| \le \left|\frac{c_n(f')}{n}\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \left|c_n(f')\right|^2\right)$$

В силу неравенства Бесселя, ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n(f')\right|^2$ сходится. Также сходится и ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Тогда заключаем, что сходится ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n(f)\right|$, а, значит, ряд Фурье функции f сходится к своей сумме равномерно. Но в силу предыдущей теоремы, его суммой является функция $f(x)$.

Теорема 8.5. *Если функция f непрерывна и периодична с периодом 2π, то ряд Фурье сходится к f в метрике пространства $C_{2\pi}$.*

Пусть функция f гладкая, за исключением нескольких точек (на периоде), где она имеет скачки. Как ведет себя ряд Фурье в точках разрыва? (В метрике пространства $C_{2\pi}$ ряд, конечно, сходится). Имеет место следующая теорема

Теорема 8.6. (Дирихле). *Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывно дифференцируема и периодична с периодом 2π. Тогда ряд Фурье сходится к*

$$\frac{1}{2}\left(f\left(x+0\right)+f\left(x-0\right)\right),$$

т.е. в точке непрерывности ряд Фурье сходится к значению функции, а в точке разрыва – к полусумме предельных значений.

Теорема 8.7. *Пусть функция* $f\left(x\right)$ *определена на отрезке* $\left[-\pi,\pi\right]$, *разлагается на нем в тригонометрический ряд Фурье и непрерывна на нем вместе со своими производными до* $p-1$ *порядка включительно. Пусть* $f^{(k)}\left(-\pi\right)=f^{(k)}\left(\pi\right),\quad k=0,1,2,\ldots p-1.$ *Если* p*-ая производная функции* $f^{p}\left(x\right)$ *кусочно непрерывна на интервале* $\left(-\pi,\pi\right)$, *то коэффициенты Фурье* a_n,b_n – *бесконечно малые функции порядка* $\frac{1}{n^p}$.

Доказательство. Имеем

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nxdx=\begin{pmatrix} u=f\left(x\right) & dv=\cos nxdx \\ du=f'\left(x\right)dx & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left.\frac{f\left(x\right)\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f'\left(x\right)\sin nxdx=-\frac{1}{n}b_n{}'.$$

Здесь a_n',b_n' коэффициенты Фурье для функции $f'\left(x\right)$. Продолжая аналогично интегрирование по частям, получим $b_n{}'=\frac{1}{n}a_n{}''$. Из этих соотношений следует

$$a_n=-\frac{1}{n}b_n{}'=-\frac{1}{n^2}a_n{}''=\frac{1}{n^3}b_n{}^{(3)}=\ldots=(-1)^k\frac{1}{n^{2k}}a_n{}^{(2k)}=(-1)^{k+1}\frac{1}{n^{2k+1}}b_n{}^{(2k+1)}=\ldots$$

Из этого соотношения или непосредственно можно получить аналогичное соотношение для b_n.

Поэтому $d_n=\frac{1}{n^p}d_n{}^{(p)}$, где $d_n=a_n$ или $d_n=b_n$ – n-ый коэффициент Фурье.

По следствию из равенства Парсеваля $d_n\underset{n\to\infty}{\to}0$ для коэффициентов Фурье самой функции и ее производных.

Следовательно, $a_n,b_n=o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ Теорема доказана.

9. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

9.1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением называют уравнение, в котором неизвестной является функция одной или нескольких переменных, причем в уравнение входят производные этой функции.

Если неизвестная функция $y = \varphi(x)$ зависит от одной переменной x, то дифференциальное уравнение называют *обыкновенным*. Если неизвестная функция $y = \varphi(\mathbf{x})$ зависит от нескольких переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то уравнение называют *уравнением в частных производных*.

Далее мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения. Такие уравнения можно записать в виде:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Определение 9.1. *Порядком* дифференциального уравнения называется порядок входящей в уравнение высшей производной. *Степенью* дифференциального уравнения называют степень высшей производной.

Например,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2x = 0$$

есть уравнение второго порядка первой степени; уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - e^x = 0$$

есть уравнение первого порядка третьей степени; уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

является уравнением в частных производных.

Определение 9.2. *Решением* дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Например, одним из решений уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

является функция $y = \sin x$.

Определение 9.3. *Интегральной кривой* дифференциального уравнения называется график его решения. Нахождение решений называют *интегрированием* дифференциального уравнения.

Уравнение считают проинтегрированным, если его решение найдено в явном виде или же определяется из конечного уравнения. В последнем случае это конечное уравнение называют *интегралом* дифференциального уравнения.

9.2. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка имеет вид:

$$(F x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение однозначно разрешимо относительно производной y', т.е. имеет вид $y' = f(x, y)$, тогда оно называется ОДУ первого порядка, разрешенным относительно производной.

Учитывая, что $y_x{}' = \dfrac{dy}{dx}$, уравнение $y' = f(x,y)$ можно записать в виде: $dy - f(x,y)dx = 0$, и тогда оно называется ОДУ первого порядка в дифференциалах.

Общий вид ОДУ первого порядка в дифференциалах можно записать как

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

где функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ определены в некоторой открытой односвязной области $D \subset R^2$, причем точки, в которых одновременно обращаются в нуль функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$, называются особыми точками уравнения.

Мы будем рассматривать только уравнения, разрешимые относительно производной:

$$y' = f\left(x,y\right)$$

Здесь функция $f\left(x,y\right)$ устанавливает для точки $\left(x,y\right)$ плоскости xOy значение производной y' – значение соответствующего углового коэффициента касательной к интегральной кривой. Говорят, что уравнение $y' = f\left(x,y\right)$ на плоскости xOy определяет *поле направлений*. Геометрически задача интегрирования этого уравнения заключается в нахождении интегральных кривых, направления касательных к которым в каждой точке совпадают с направлением поля. Например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

в каждой (отличной от начала координат) точке $\left(x,y\right)$ определяет угловой коэффициент касательной $\dfrac{y}{x}$, который совпадает с угловым коэффициентом прямой, проходящей через начало координат и точку $\left(x,y\right)$. Поэтому интегральными кривыми уравнения будут всевозможные прямые, проходящие через начало координат.

Часто для построения интегральных кривых удобно предварительно найти геометрическое место точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым сохраняют постоянное направление. Такие линии называются *изоклинами*.

Например, изоклины уравнения $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$ задаются уравнениями $\sqrt{x^2 + y^2} = k$ или $x^2 + y^2 = k^2$, так как на каждой изоклине производная $\frac{dy}{dx}$ должна сохранять постоянное значение. Полученные уравнения задают семейство концентрических окружностей с центром в начале координат, а угловой коэффициент касательной к интегральной кривой равен радиусу проходящей через данную точку окружности.

10. Задача Коши. Теорема существования и единственности

Задачу отыскания решения уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$, называют *задачей Коши*.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называют функцию

$$y = \varphi(x, C),$$

которая зависит от одной произвольной постоянной *C* и удовлетворяет двум условиям:

– является решением уравнения $y' = f(x, y)$ при любом значении постоянной *C*;

– каково бы ни было начальное условие $\varphi(x_0) = y_0$, можно найти такое значение постоянной $C = C_0$, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет уравнению $y' = f(x, y)$.

Если общее решение

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

получено в неявной форме, то его называют *общим интегралом* уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение

$$y = \varphi(x, C_0),$$

удовлетворяющее заданному начальному условию. Частное решение может быть получено из общего выбором соответствующего значения C_0 постоянной C.

Частное решение, полученное в неявной форме $\Phi(x, y, C_0) = 0$, называют *частным интегралом*.

Может оказаться, что функция $y = \varphi(x)$ является частным решением уравнения, однако не может быть получена из общего решения ни при каком выборе постоянной C. В этом случае функцию $y = \varphi(x)$ называют *особым решением*.

Рассмотрим предварительно метод приближенного решения дифференциальных уравнений, метод Эйлера, обоснование которого будет дано в приведенной ниже теореме.

Метод Эйлера заключается в том, что искомая интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$, проходящая через точку (x_0, y_0), заменяется ломаной, каждое звено которой касается интегральной кривой в одной из своих граничных точек.

Пусть требуется найти приближенное значение искомого решения при $x = b$. Разделим отрезок $[x_0, b]$ на n равных частей (полагаем, что $b > x_0$) и назовем шагом вычисления h длину отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$. Заменим на отрезке $[x_0, x_1]$ интегральную кривую отрезком ее касательной в точке (x_0, y_0). Ордината этого отрезка при $x = x_1$ равна $y_1 = y_0 + hy_0'$, где $y_0' = f(x_0, y_0)$. Так же найдем

$$y_1 = y_1 + hy_1', \text{ где } y_1' = f(x_1, y_1);$$

$$y_2 = y_2 + hy_2', \text{ где } y_2' = f(x_2, y_2)$$

…………………………………….

$$y_n = y_n + hy_n', \text{ где } y_2' = f(x_2, y_2)$$

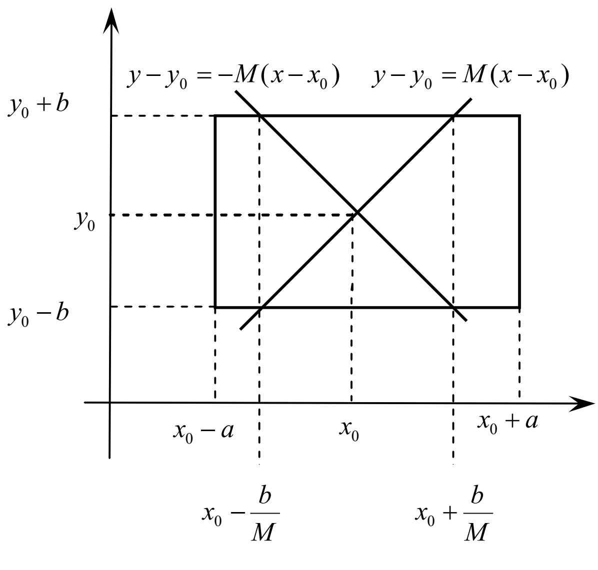
Можно предположить, что при $h \to 0$ построенные таким образом *ломаные Эйлера* приближаются к графику искомой кривой. Доказательство этого утверждения будет дано в следующей теореме существования и единственности (теорема Коши).

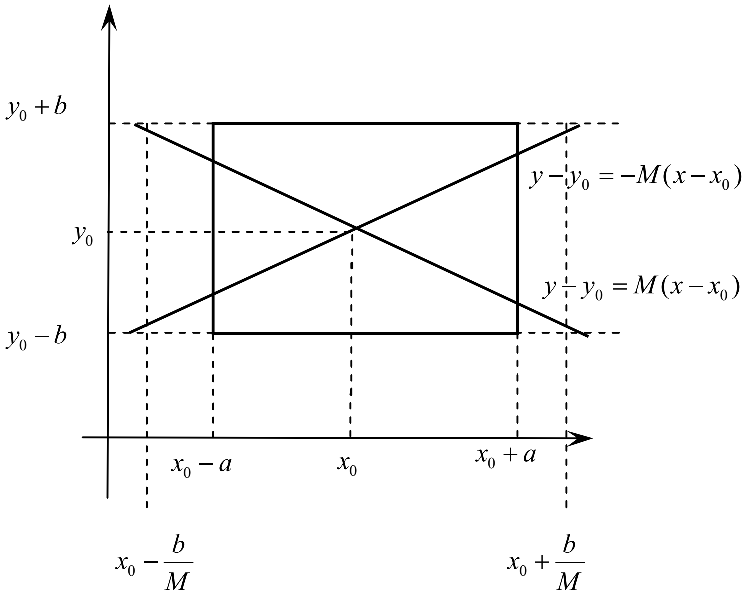
Теорема 10.1. *Если в уравнении* $y' = f(x, y)$ *функция* $f(x, y)$ *непрерывна в прямоугольнике* $D: x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b$ *и удовлетворяет в* D *условию Липшица*

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le N \left| y_1 - y_2 \right|,$$

где N *– постоянная, то существует единственное решение* $y = \varphi(x)$, $x_0 - H \le x \le x_0 + H$ *этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(x_0) = y_0$, *где* $H < \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N})$ *и* $M = \max f(x, y)$ *в D.*

Замечание 10.1. Нельзя утверждать, что искомое решение будет существовать при $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, так как интегральная кривая может выйти из прямоугольника, и тогда решение может быть не определено.





Появления в формулировке теоремы существования и единственности решения задачи Коши параметра H является абсолютно естественным. В самом деле, если $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, то поскольку мы ищем решения уравнения $y' = f\left(x, y\right)$, все они удовлетворяют оценке $\left|y'\right| \le M$.

Следовательно, максимальная скорость роста (убывания) решения не превышает скорости функции

$$y_1(x) = y_0 + M(x - x_0) \;\; (y_2(x) = y_0 - M(x - x_0))$$

Нарисовав графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, заметим, что они выходят за пределы прямоугольника D в точках $x_0 \pm \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$. Но решения нашего уравнения, проходящих через среднюю точку (x_0, y_0) прямоугольника D, не могут расти (убывать) быстрее, чем $y_1(x)$ и $y_2(x)$, поэтому их графики зажаты между прямыми $y(x) = y_0 \pm M(x - x_0)$.

Именно поэтому гарантировать существование решения можно только в пределах отрезка $x_0 - H \le x \le x_0 + H$, ибо за его пределами (как на первом рисунке) оно может выйти из прямоугольника D.

Замечание 10.2. Условие Липшица можно заменить более сильным требованием $|f_y'(x,y)| \le N$ в D. Тогда по теореме Лагранжа

$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=f'_y(x,\xi)|y_1-y_2|$, где $y_1\le\xi\le y_2$. Таким образом, $\xi\in D$ и $|f'_y(x,\xi)|\le N$. Поэтому $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le N|y_1-y_2|$.

Доказательство теоремы.

Заменим уравнение $y'=f\left(x,y\right)$ с начальным условием $\varphi\left(x_0\right)=y_0$ эквивалентным интегральным уравнением

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx.$$

Легко проверить, что функция $y=\varphi(x)$, обращающая в тождество уравнение $y'=f\left(x,y\right)$, будет решением и интегрального уравнения.

Построим ломаную Эйлера $y=y_n(x)$, исходящую из точки (x_0,y_0) с шагом $h_n=\dfrac{H}{n}$ на отрезке $\left[x_0,x_0+H\right]$ (аналогично можно доказать существование решения на $\left[x_0-H,x_0\right]$). Такая ломаная не может выйти за пределы *D*, так как угловые коэффициенты каждого ее звена по модулю меньше *M*. Теперь докажем последовательно три утверждения:

1) Последовательность $y=y_n(x)$ равномерно сходится.

2) Функция $y=\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)$ является решением интегрального уравнения.

3) Решение $y=\varphi(x)$ уравнения единственно.

Доказательство 1). По определению ломаной Эйлера имеем
$y'_n(x)=f(x_k,y_k)$ при $x_k\le x\le x_{k+1},$, $k=0,1,...,n-1$ или

$$y'_n(x)=f(x,y_n(x))+(f(x_k,y_k)-f(x,y_n(x)).$$

Обозначим $f(x_k,y_k)-f(x,y_n(x))=\eta_n(x)$, тогда в силу равномерной непрерывности $f(x,y)$ в D справедливо соотношение

$$|\eta_n(x)|=|f(x_k,y_k)-f(x,y_n(x))|<\varepsilon_n$$

при $n > N(\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, так как $|x - x_k| \le h_n$, а $|y_k - y_n(x)| < Mh_n$ и $h_n = \dfrac{H}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Интегрируя $y_n'(x)$ по *x* в пределах от x_0 до *x* и учитывая, что $y_n(x_0) = y_0$, получим:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt .$$

Так как *n* – любое целое положительное число, то для любого $m > 0$

$$y_{n+m}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n+m}(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_{n+m}(t)dt ,$$

откуда

$$|y_{n+m}(x) - y_n(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_{n+m}(t)dt - \int_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt \right| \le$$

$$\le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t))|\, dt + \int_{x_0}^{x} |\eta_{n+m}(t)|\, dt + \int_{x_0}^{x} |\eta_n(t)|\, dt .$$

Тогда из условия Липшица следует, что

$$|y_{n+m}(x) - y_n(x)| \le N \int_{x_0}^{x} |y_{n+m}(t) - y_n(t)|\, dt + (\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n)H .$$

Следовательно,

$$\max_{x_0 \le x \le x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| \le N \max_{x_0 \le x \le x_0 + H} \int_{x_0}^{x} |y_{n+m}(t) - y_n(t)|\, dt + (\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n)H ,$$

откуда

$$\max_{x_0 \le x \le x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| \le \frac{(\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n)H}{1 - NH} < \varepsilon .$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ при $n > N_1(\varepsilon)$, то есть последовательность непрерывных функций $y_n(x)$ равномерно сходится при $x_0 \le x \le x_0 + H$ к некоторой непрерывной функции $y = \varphi(x)$. Итак, утверждение 1) доказано.

Доказательство 2). Перейдем к пределу при $n \to \infty$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x)=\varphi(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))dt+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}\eta_n(t)dt.$$

В силу равномерной сходимости $y_n(x)$ к $y=\varphi(x)$ и равномерной непрерывности $f(x,y)$ в D последовательность $f(x,y_n)$ равномерно сходится к $f(x,\varphi(x))$. Действительно, $|f(x,\varphi(x))-f(x,y_n(x)|<\varepsilon$ при $|\varphi(x)-y_n(x)|<\delta(\varepsilon)$, что выполняется при $n>N_1(\delta(\varepsilon))$ для всякого $x\in[x_0,x_0+H]$.

Следовательно, возможен переход к пределу под знаком интеграла. Учитывая, что $|\eta_n(\varepsilon)|<\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, получим:

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_o}^{x} f(x,\varphi(x))dx,$$

то есть $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению. Утверждение 2) доказано.

Доказательство 3). Предположим, что существуют два различных решения уравнения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, то есть $\max\limits_{x_0\le x\le x_0+H}\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|\ne 0$. Тогда, справедливо соотношение

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\equiv\int_{x_0}^{x}(f(x,\varphi_1(x))-f(x,\varphi_2(x)))dx,$$

из которого получаем

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|=\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|\int_{x_0}^{x}(f(x,\varphi_1(x))-f(x,\varphi_2(x)))dx\right|\le$$

$$\le\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,\varphi_1(x))-f(x,\varphi_2(x))|\,dx\right|.$$

Применим к этому неравенству условие Липшица. Тогда получим

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|\le N\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\,dx\right|\le$$

$$\le N \max_{x_0 \le x \le x_0 + H} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \left| \int_{x_0}^{x} dx \right| = NH \max_{x_0 \le x \le x_0 + H} \left| \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \right|.$$

Если $\max\limits_{x_0 \le x \le x_0 + H} \left| \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \right| \ne 0$, то полученное равенство

$$\max_{x_0 \le x \le x_0 + H} \left| \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \right| \le NH \max_{x_0 \le x \le x_0 + H} \left| \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \right|$$

противоречиво, так как по условию теоремы $H < \dfrac{1}{N}$. Следовательно, $\max\limits_{x_0 \le x \le x_0 + H} \left| \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \right| = 0$, то есть $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. ■

Если для точки $P_0(x_0, y_0)$ области D выполнены условия теоремы, то через эту точку проходит единственная интегральная кривая $y = \varphi(x)$. Если для точки $P_0(x_0, y_0)$ условия теоремы нарушены, то эту точку называют *особой*. В такой точке может нарушаться единственность решения или же решения может не быть вовсе; в первом случае через точку проходит несколько различных интегральных кривых, во втором – не проходит ни одна. Особые точки могут быть изолированы или же могут заполнять *особые линии*. Например, для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

ось ординат является особой линией (через точки этой линии не проходит ни одна интегральная кривая).

Дифференциальное уравнение (в предположении о выполнении условий теоремы существования и единственности) имеет бесконечное множество решений, которые удовлетворяют различным начальным условиям (существует бесконечно много интегральных кривых, которые проходят через различные точки).

11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

11.1. Задача коши

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0,$$

где F предполагается непрерывной функцией всех своих аргументов. Тогда по теореме о существовании неявной функции можно разрешить это уравнение относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$$

и сформулируем для него (без доказательства) теорему существования и единственности решения:

Теорема 11.1. *Существует единственное решение уравнения* $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$, *удовлетворяющее условиям*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

если в окрестности начальных значений $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$ *функция* f *является непрерывной функцией всех своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго.*

Замечание 11.1. Так же, как и для дифференциального уравнения первого порядка, задача отыскания решения уравнения $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$,

удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

называется *задачей Коши*.

Замечание 11.2 Теорема 11.1 утверждает существование частного решения уравнения $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$, удовлетворяющего данным начальным условиям. С геометрической точки зрения это соответствует существованию интегральной кривой, проходящей через точку $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$. Но, используя эту теорему, можно доказать и существование *общего решения* этого уравнения, содержащего *n* произвольных постоянных и имеющего вид:

$$y = \phi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

или, в неявной форме:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0 .$$

Это соотношение будем называть *общим интегралом* исходного уравнения.

12. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Уравнение имеет вид: $y_x^{(n)} = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывная на промежутке $x \in (a,b)$. Последовательно интегрируя, получаем общее решение уравнения.

$$y(x) = \underbrace{\int \dots \int}_{n} f(x)dx\dots dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1}x + C_n,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

Случай 2. Уравнение имеет вид:

$$F(x, y_{x^k}^{(k)}, y_{x^{k+1}}^{(k+1)}, \dots, y_{x^n}^{(n)}) = 0, (k \ge 1).$$

Подстановка $z(x) = y_{x^k}^{(k)}$ приводит к уравнению

$$F(x, z, z'_x, z''_x, \dots, z_x^{(n-k)}) = 0$$

$(n-k)$-го порядка.

Случай 3. Уравнение имеет вид:

$$F(y, y'_x, y''_x, \dots, y_x^{(n)}) = 0 .$$

Подстановка $z(y) = y'_x$ приводит к уравнению

$$\Phi(y, z, z'_y, z''_y, \dots, z_y^{(n-1)}) = 0,$$

при этом производные $y'_x, y''_x, \dots, y_x^{(n)}$ выражаются через $z, z'_y, z''_y, \dots, z_y^{(n-1)}$ по формулам

$$y''_x = \left(y'_x\right)'_x = \left(y'_x\right)'_y \cdot y'_x = z'_y \cdot z$$

$$y'''_x = \left(y''_x\right)'_x = \left(y''_x\right)'_y \cdot y'_x = z''_y \cdot z^2 + (z'_y)^2 \cdot z$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_x^{(n)} = z_y^{(n-1)} \cdot z^{n-1} + \ldots + (z'_y)^{n-1} \cdot z \ .$$

Случай 4. Уравнение (1) имеет вид:

$$Q'_x(x, y, y'_x, y''_x, ..., y_x^{(n-1)}) = 0.$$

Уравнение равносильно уравнению

$$Q(x, y, y'_x, y''_x, ..., y_x^{(n-1)}) = C_1$$

$(n-1)$ - го порядка.

Это соотношение называется первым интегралом ОДУ.

Случай 5. Функция F в уравнении однородная относительно $y, y'_x, y''_x, ..., y_x^n$ порядка $k \geq 0,$ то есть имеет место равенство

$$F(x, ty, ty'_x, ty''_x, ..., ty_x^n) = t^k F(x, y, y'_x, y''_x, ..., y_x^n).$$

Подстановка $y'_x = y \cdot z$ где $z = z(x)$ – новая искомая функция, приводит к уравнению

$$y^k \cdot \Phi(x, z, z'_x, z''_x, ..., z_x^{(n-1)}) = 0$$

$(n-1)$-го порядка. При этом производные $y''_x, ..., y_x^n$ выражаются через $y, z, z'_x, z''_x, ..., z_x^{(n-1)}$ по формулам

$$y''_x = \left(y'_x\right)'_x = \left(y \cdot z\right)'_x = y'_x z + y z'_x = y\left(z^2 + z'_x\right)$$

$$y'''_x = \left(y''_x\right)'_x = \left(y(z^2 + z'_x)\right)'_x = y(z^3 + 3zz'_x + z''_x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_x^{(n)} = y(z^n + \ldots + z_x^{(n-1)}).$$

Случай 6. Функция F в уравнении является обобщенно однородной, то есть имеет место равенство

$$F(tx, t^m y, t^{m-1} y'_x, t^{m-2} y''_x, ..., t^{m-n} y^{(n)}_{x^n}) = t^k F(x, y, y'_x, ..., y^{(n)}_{x^n}).$$

Произведём замену независимой переменной x и искомой функции $y(x)$ на новую независимую переменную t и новую искомую функцию $z(t)$ по формулам

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = z(t) \cdot e^{mt}, \end{cases}$$

при этом

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'_t e^{mt} + mze^{mt}}{e^t} = e^{(m-1)t}(z'_t + mz),$$

$$y''_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{(z''_t + mz'_t)e^{(m-1)t} + (m-1)(z'_t + mz)e^{(m-1)t}}{e^t} =$$

$$= e^{(m-2)t}\left[z''_t + (2m-1)z'_t + m(m-1)z\right],$$

……………………………………

После замены получим уравнение

$$\Phi(z, z'_t, z''_t, ..., z^{(n)}_t) = 0,$$

которое подстановкой $u(z) = z'_t$ приводится к уравнению

$$\Phi^*(z, u(z), u'_z, u''_z, ..., u^{(n-1)}_z) = 0$$

$(n-1)$-го порядка.

Пример 12.1. Найти решение уравнения $y''' + y' = 0$.

◄Выполним замену $y' = t$, $y''' = t''$. Получим

$$t'' + t = 0.$$

Положим далее $t' = z$, $t'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = z\frac{dz}{dt}$, тогда

$$z\frac{dz}{dt} + t = 0,\ zdz = -tdt,\ z^2 + t^2 = C_1^2,\ z = \pm\sqrt{C_1^2 - t^2},$$

$$\frac{dt}{dx} = \pm\sqrt{C_1^2 - t^2},\ \frac{dt}{\sqrt{C_1^2 - t^2}} = \pm dx,\ \arcsin\frac{t}{C_1} = \pm x + C_2,$$

$$t = C_1 \sin\left(\pm x + C_2\right),$$

откуда

$$dy = C_1 \sin\left(\pm x + C_2\right) dx,$$

$$y = C_1 \cos\left(\pm x + C_2\right) + C_3. \ \blacksquare$$

Пример 12.2. Решить уравнение $y'' + \left(y'\right)^2 = 0$.

◀Выполняя замену $y' = z$, $y'' = z\frac{dz}{dy}$, получим

$$z\frac{dz}{dy} + z^2 = 0.$$

Одним из решений этого уравнения является функция $z = 0$. Пусть $z \neq 0$:

$$\frac{dz}{dy} = -z,\ .z = C_1 e^{-y}.$$

Полученное решение включает функцию $z = 0$ в качестве частного случая (соответствует значению $C_1 = 0$), поэтому отдельно рассматривать решение $z = 0$ не нужно. Возвращаясь к искомой функции, получим

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^{-y},\ e^y dy = C_1 dx,\ e^y = C_1 x + C_2,\ y = \ln\left(C_1 x + C_2\right). \ \blacksquare$$

Аналогично понижается степень в уравнениях вида

$$y^{(n+2)} + y^{(n)} = 0.$$

Пример 12.3 Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$.

◀Это уравнение вида $y''' = f(x)$. Проинтегрируем его три раза.

$$y'' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 \right) = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Используем начальные условия: $1 = \frac{1}{8} + C_3$, $-1 = \frac{1}{4} + C_2, 0 = \frac{1}{2} + C_1$.

Тогда $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{5}{4}$, $C_3 = \frac{7}{8}$.

Получаем частное решение исходного уравнения:

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{7}{8}. \blacksquare$$

Пример 12.4. Найти частное решение уравнения $y'' = xe^{-x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

◀Проинтегрируем последовательно данное уравнение два раза.

$$y' = \int xe^{-x} dx = \left\{ \begin{matrix} x = u & dx = du \\ e^{-x} dx = dv & -e^{-x} = v \end{matrix} \right\} = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int \left(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1 \right) dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1 x + C_2.$$

Используем начальные условия: $1 = 0 + 2 + 0 + C_2$, $0 = 0 - 1 + C_1$.

Тогда $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. Искомое частное решение примет вид:

$$y = xe^{-x} + 2e^{-x} + x - C_2. \blacksquare$$

Пример 12.5 Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{y''}{x}$.

◀Применяем подстановку $z = y''$, $z' = y'''$. Имеем: $z' = \frac{z}{x}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$, $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$.

Отсюда

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1, \; z = C_1 x.$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x,$$

$$y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3.$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3. \; \blacksquare$$

Пример 12.6. Найти общее решение уравнения $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x} \right)$.

◀Применяем подстановку $z = y'$, $z' = y''$. Получаем: $xz' = z \ln\left(\frac{z}{x} \right)$.

Это линейное уравнение. Разделим обе части уравнения на x и введем замену $u = \frac{z}{x}$, $z' = u'x + u$. Получим: $u'x + u = u \ln u$.

$$x \frac{du}{dx} = u(\ln u - 1),$$

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{d(\ln u - 1)}{(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln(\ln u - 1) = \ln|C_1 x|,$$

$$\ln u = C_1 x + 1, u = e^{C_1 x + 1}.$$

Введем обратную замену. $\frac{z}{x} = e^{C_1 x + 1}$.

Получаем общее решение исходного уравнения:

$$y=\int xe^{C_1x+1}dx=\left\{\begin{matrix} x=u & dx=du \\ e^{C_1x+1}dx=dv & \dfrac{e^{C_1x+1}}{C_1}=v \end{matrix}\right\}=\frac{xe^{C_1x+1}}{C_1}-\frac{e^{C_1x+1}}{C_1^2}+C_2 .\ \blacksquare$$

Пример 12.7. Найти общее решение уравнения $yy''-(y')^2-4yy'=0.$

◀Введем замену переменной: $p=y'$. Тогда $y''=\dfrac{dp}{dy}p$. Подставляем данные замены в исходное уравнение:

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2-4yp=0,$$

$$p\left(y\frac{dp}{dy}-p-4y\right)=0.$$

Как известно, произведение равно нулю в том случае, если равен нулю хотя бы один множитель. Приравняем каждый множитель к нулю. Получим:

$$1)\ y\frac{dp}{dy}-p-4y=0,\ p'-\frac{p}{y}=4.$$

Это линейное уравнение. Умножим обе части этого уравнения на интегрирующий множитель:

$$\mu=e^{\int P(y)dy}=e^{-\int\frac{dy}{y}}=\frac{1}{y}.$$

Имеем:

$$\frac{p'}{y}-\frac{p}{y^2}=\frac{4}{y},$$

$$d\left(\frac{p}{y}\right)=\frac{4}{y}.$$

$$\frac{p}{y}=\int\frac{4}{y}dy,$$

$$\frac{p}{y}=4\ln y+4\ln C_1$$

$$p=4y\ln\left|C_1y\right|.$$

С учетом того, что $p=\dfrac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx}=4y\ln\left|C_1y\right|, \qquad \int\frac{dy}{4y\ln\left|C_1y\right|}=\int dx,$$

$$x=\frac{1}{4}\int\frac{d(\ln\left|C_1y\right|)}{\ln\left|C_1y\right|}=\frac{1}{4}\ln\left|\ln\left|C_1y\right|\right|+C_2.$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln\left|\ln\left|C_1y\right|\right|=4x+C$.

2) $p=0$, $y'=0$, $y=C$ – особое решение.

Таким образом, получили два решения исходного дифференциального уравнения. ■

Пример 12.8. Найти общее решение уравнения $yy''+y=(y')^2$.

◄Сделаем замену переменной: $p=y'$. Тогда $y''=\dfrac{dp}{dy}p$. Подставляем данные замены в исходное уравнение:

$$yp\frac{dp}{dy}+y=p^2.$$

Разделим обе части уравнения на y. Это можно сделать только в том случае если не является решением выражение $y=0$. Получаем:

$$p'p+1-\frac{p^2}{y}=0,$$

$$p'p-\frac{p^2}{y}=-1.$$

Получили уравнение Бернулли.

Введем новую переменную, полагая $p^2=z$, $2pp'=z'$.

Имеем:

$$\frac{z'}{2}-\frac{z}{y}=-1,$$

$$z'-\frac{2}{y}z=-2.$$

Умножим обе части этого уравнения на интегрирующий множитель:

$$\mu = e^{\int P(y)dy} = e^{-2\int \frac{dy}{y}} = \frac{1}{y^2}.$$

Получим:

$$\frac{z'}{y^2} - \frac{2}{y^3}z = -\frac{2}{y^2}.$$

Правая часть последнего равенства представляет собой производную от $\frac{z}{y^2}$.

Поэтому получаем

$$d\left(\frac{z}{y^2}\right) = -\frac{2}{y^2},$$

$$\frac{z}{y^2} = -\int \frac{2}{y^2}dy,$$

$$\frac{z}{y^2} = \frac{1}{y} + C_1^2,$$

$$z = y + y^2 C_1^2.$$

Произведем обратную замену. Получаем:

$$p^2 = \left(y'\right)^2 = y + y^2 C_1^2,$$

$$y' = \pm\sqrt{y + y^2 C_1^2}.$$

Откуда

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y + y^2 C_1^2}} = \pm x + C_2.$$

Вычислим интеграл, стоящий в левой части уравнения. Имеем:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y + y^2 C_1^2}} = \frac{1}{C_1}\int \frac{dy}{\sqrt{\left(y^2 + 2\frac{y}{2C_1^2} + \frac{1}{4C_1^4}\right) - \frac{1}{4C_1^4}}} = \frac{1}{C_1}\int \frac{d\left(y + \frac{1}{2C_1^2}\right)}{\sqrt{\left(y + \frac{1}{2C_1^2}\right)^2 - \frac{1}{4C_1^4}}} =$$

$$=\frac{1}{C_1}\ln\left|y+\frac{1}{2C_1^2}+\sqrt{\left(y+\frac{1}{2C_1^2}\right)^2-\frac{1}{4C_1^4}}\right|.$$

Окончательно получим общее решение исходного уравнения:

$$x=C_2\pm\frac{1}{C_1}\ln\left|y+\frac{1}{2C_1^2}+\sqrt{\left(y+\frac{1}{2C_1^2}\right)^2-\frac{1}{4C_1^4}}\right|.\ \blacksquare$$

Пример 12.9. Найти общее решение уравнения $xyy''-x\left(y'\right)^2=y'y$

. ◄Преобразуем уравнение к виду:

$$xyy''-x\left(y'\right)^2-y'y=0.$$

Вынесем за скобки в левой части уравнения y^2. Получим:

$$y^2\left(x\frac{y''}{y}-x\left(\frac{y'}{y}\right)^2-\frac{y'}{y}\right)=0.$$

Сделаем замену переменных: $\frac{y'}{y}=p$.

Продифференцируем обе части данной замены. Получим:

$$\frac{y''y-\left(y'\right)^2}{y^2}=p'$$

или

$$p'=\frac{y''}{y}-\frac{\left(y'\right)^2}{y^2}=\frac{y''}{y}-p^2.$$

Тогда

$$\frac{y''}{y}=p^2+p'.$$

Подставим замену в дифференциальное уравнение.

$$y^2\left(x\left(p^2+p\right)-xp^2-p\right)=0,$$

$y=0$ – особое решение.

Тогда

$$x\left(p^2+p\right)-xp^2-p=0,$$

$$xp-p=0,$$

$$p\left(x-1\right)=0.$$

Отсюда $x=1$ или $\dfrac{y'}{y}=p=0$. Значит, $y'=0$, $y=C$. ■

Пример 12.10. Найти общее решение уравнения $3\left(y'\right)^2=4y''y+y^2$.

◀Поделим обе части данного уравнения на y^2. Получим:

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2=4\frac{y''}{y}+1.$$

Сделаем замену переменных: $\dfrac{y'}{y}=p$. Продифференцировав обе части этого равенства, получим, что

$$\frac{y''}{y}=p^2+p'.$$

После подстановки в уравнение имеем:

$$3p^2=4p^2+4p'+1,$$

$$p'=-\frac{p^2+1}{4},$$

$$\frac{dp}{p^2+1}=-\frac{dx}{4}.$$

Проинтегрируем полученное уравнение.

$$\int\frac{dp}{p^2+1}=-\int\frac{dx}{4},$$

$$arctgp=-\frac{x}{4}+C_1.$$

После возвращения к исходной функции

$$\frac{y'}{y}=p=tg\left(-\frac{x}{4}+C_1\right).$$

Отсюда

$$y' = y\,tg\left(-\frac{x}{4} + C_1\right),$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int tg\left(-\frac{x}{4} + C_1\right)dx.$$

Тогда

$$\ln|y| = 4\ln\left|\cos\left(-\frac{x}{4} + C_1\right)\right| + \ln|C_2|.$$

Искомое общее решение дифференциального уравнение примет вид:

$$y = C_2\cos^4\left(-\frac{x}{4} + C_1\right). \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $y^{(4)} = \cos^2 x$, $y(0) = \frac{1}{32}$, $y'(0) = y'''(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{8}$. **2.** $y'''\sin^4 x = \sin 2x$

3. $y'' = 2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$. **4.** $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' = 2$. **5.** $2xy'''y'' = y''^2 - 1$.

6. $\left(1 + x^2\right)y'' + 1 + y'^2 = 0$. **7.** $y'''(x-1) - y'' = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$, $y''(2) = 1$.

8. $y''(2y+3) - 2y'^2 = 0$. **9.** $yy'' - y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

10. $yy'' - y'^2 = y^2\ln y$. **11.** $y''(1+y) = y'^2 + y'$. **12.** $(y + y')y'' + y'^2 = 0$.

13. $2xy'''y'' = y''^2 - 1$. **14.** $yy'' = y'^2$. **15.** $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

13. ЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА (ЛОДУ)

13.1. Основные понятия и определения

Определение 13.1. Уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x),$$

где функции $a_i(x)\,(i=1,2,..,n)$ и $F(x)$ непрерывны в некотором промежутке (a,b) и $a_0(x) \neq 0$ для всех $x \in (a,b)$ называется *линейным обыкновенным дифференциальным уравнением* n*-го порядка* (ЛОДУ).

Если разделить обе части уравнения на $a_0(x)$ и ввести обозначение $p_i(x) = \dfrac{a_i(x)}{a_0(x)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ и $g(x) = \dfrac{F(x)}{a_0(x)}$, то получим ЛОДУ n-го порядка в *канонической форме*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x).$$

Если $g(x) \not\equiv 0$, тогда уравнение называется линейным *неоднородным* обыкновенным дифференциальным уравнением (ЛНОДУ) n-го порядка, а если $g(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

называется линейным *однородным* обыкновенным дифференциальным уравнением (ЛООДУ) n-го порядка.

Замечание 13.1. ЛООДУ на промежутке $x \in (a,b)$ всегда имеет решение $y(x) \equiv 0$, которое называется *тривиальным* решением.

Запишем ЛНОДУ в разрешенном относительно $y^{(n)}$ виде

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - \ldots - p_n(x)y + g(x) \equiv f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Так как функция f в непрерывна вместе со своими частными производными по переменным $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ в области

$$V=\left\{x\in(a,b),\left(y,y',...,y^{(n-1)}\right)\in\mathbb{R}^n\right\},$$

то в окрестности $S(\varepsilon,M_0^*)\subset V$ любой точки $M_0^*(x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)})\in V$ выполняются все условия теоремы существования и единственности решения $y=y(x)$ задачи Коши для уравнения с начальными условиями $y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0,...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ для $x_0\in(a,b)$. Отсюда следует, что для любого значения $x_0\in(a,b)$ и для любых, наперед заданных, вещественных значений $y_0,y_0',y_0'',...,y_0^{(n-1)}\in\mathbb{R}^n$ существует единственное решение задачи Коши для уравнений ЛНОДУ. Таким образом, любое решение $y=y(x)$ ЛНОДУ является частным и поэтому особые решения отсутствуют.

Замечание 13.2. Единственным решением задачи Коши для ЛООДУ с начальными условиями

$$y(x_0)=0,y'(x_0)=0,...,y^{(n-1)}(x_0)=0 \text{ для } x_0\in(a,b)$$

является тривиальное решение $y(x)\equiv 0.$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор n-го порядка

$$L_n[\cdot]=\left(\frac{d^n}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+p_2(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-1}}+...+p_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+p_n(x)\right)[\cdot],$$

определённый на множестве всех непрерывных и n раз дифференцируемых функций $C^n_{(a,b)}$, то есть для любой функции $y(x)\in C^n_{(a,b)}$ на промежутке (a,b) справедливо тождество

$$L_n[y(x)]\equiv\frac{d^ny(x)}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}+p_2(x)\frac{d^{n-2}y(x)}{dx^{n-2}}+...+p_n(x)y(x).$$

При этом предполагается, что все функции $p_i(x)\,(i=1,2,...,n)$ непрерывны для всех $x\in(a,b)$.

Рассматриваемый оператор $L_n[\cdot]$ обладает следующими свойствами:

1) $L_n[\alpha y(x)]=\alpha L[y(x)],y(x)\in C^n_{(a,b)}$ для всех действительных α;

2) $L_n\left[\sum_{i=1}^{k} y_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{k} L_n[y_i(x)], y_1(x), y_2(x),..., y_k(x)\in C^n_{(a,b)}$;

3) $L_n\left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{k} \alpha_i L_n[y_i(x)], y_1(x), y_2(x),..., y_k(x)\in C^n_{(a,b)}$ для произвольных действительных значений $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$.

Определение 13.2. Система функций $\{y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)\}$, определённых на промежутке $x\in(a,b)$, называется линейно зависимой на этом промежутке, если найдутся такие действительные $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2>0$, что

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i(x)\equiv 0.$$

Если же последнее равенство имеет место лишь в случае, когда все постоянные $\alpha_i\,(i=1,2,...,n)$ одновременно равны нулю, то система функций $\{y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)\}$ называется линейно независимой на (a,b).

Пример 13.1. Система функций $\{1, x, x^2,..., x^n\}$ является линейно независи- мой в любом интервале $(a,b)\subset\mathbb{R}$.

◀В самом деле, соотношение

$$\alpha_0\cdot 1+\alpha_1\cdot x+\alpha_2\cdot x^2+...+\alpha_n\cdot x^n=0,$$

в котором не все $\alpha_i\in R(i=0,1,2,...,n)$ равны нулю, не может выполняться тождественно, ибо оно определяет собой алгебраическое уравнение n-ой степени с вещественными коэффициентами и поэтому не может иметь более чем n вещественных корней. ■

Пример 13.2 Система функций $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x},..., e^{\lambda_n x}\}$, где все $\lambda_i\,(i=\overline{1,n})$ вещественные и различные, является линейно независимой в любом интервале $(a,b)\subset\mathbb{R}$.

◀Действительно, предположим противное. Пусть существуют такие $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i x} \equiv 0.$$

Пусть, для определенности, $\alpha_n \neq 0$. Разделим обе части тождества на $e^{\lambda_1 x} \neq 0$ и продифференцируем по x. Тогда получим

$$\sum_{i=2}^{n} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) e^{(\lambda_i - \lambda_1) x} \equiv 0.$$

Разделим обе части тождества на $e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x} \neq 0$ и продифференцируем по x. Тогда получим

$$\sum_{i=3}^{n} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) e^{(\lambda_i - \lambda_2) x} \equiv 0.$$

Рассуждая аналогично, приходим после $(n-1)$-го шага к тождеству

$$\alpha_n (\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \cdots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{(\lambda_n - \lambda_{n-1}) x} \equiv 0,$$

из которого, в силу различности всех λ_i, следует $\alpha_n = 0$, что невозможно. Отсюда следует утверждение примера. ■

Теорема13.1. *Если некоторая непустая подсистема* $\{y_1(x), ..., y_m(x)\}$ *сис-темы функций* $\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$ $(n > m)$ *линейно зависима на промежутке* (a, b)*, то и сама система линейно зависима на этом промежутке.*

Следствие 13.1. *Если одна из функций системы* $\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$*, определён-ных на промежутке* (a, b)*, тождественно равна нулю на этом промежутке, то такая система функций линейно зависима на* (a, b)*.*

Определение 13.3. Определитель

$$W[y_1(x), ..., y_n(x)] \equiv W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

называется *определителем Вронского* для системы функций $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$, непрерывно дифференцируемых до $(n-1)$-го порядка включительно на промежутке (a,b).

Теорема 13.2. *Если система функций* $\{y_1(x),...,y_n(x)\}, y_i(x) \in C^{n-1}_{(a,b)}$, $(i=\overline{1,n})$ *линейно зависима на* (a,b), *то* $W(x)=0$ *для всех* $x \in (a,b)$.

Доказательство. По условию теоремы найдутся такие действительные $\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*$, $\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^*\right)^2 > 0$, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* y_i(x) \equiv 0.$$

Продифференцируем это равенство по x до $(n-1)$-го порядка включительно. Получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1^* y_1(x) + \alpha_2^* y_2(x) + ... + \alpha_n^* y_n(x) \equiv 0 \\ \alpha_1^* y_1'(x) + \alpha_2^* y_2'(x) + ... + \alpha_n^* y_n'(x) \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1^* y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2^* y_2^{(n-1)}(x) + ... \alpha_n^* y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Эта система является однородной алгебраической системой относительно $\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*$ с определителем $\Delta = W(x)$. Так как $\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^*\right)^2 > 0$, то $W(x)=0$ для всех $x \in (a,b)$. Теорема доказана.

Следствие 13.2 *Система функций* $\{y_1(x),...,y_n(x)\}, y_i(x) \in C^{n-1}_{(a,b)}, (i=\overline{1,n})$ *линейно независима на промежутке* (a,b) *если найдется хотя бы одно такое* $x_0 \in (a,b)$, *что* $W(x_0) \neq 0$.

13.2. ЛООДУ n-го порядка с непрерывными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

где функции $p_i(x)\,(i = \overline{1,n})$ непрерывные в промежутке $x \in (a,b)$.

Лемма 13.1. *Если функции* $y_i(x)\,(i = \overline{1,m})$ *являются решениями уравнения, то любая их линейная комбинация*

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x),$$

где $\alpha_i\,(i = \overline{1,m})$ *- произвольные вещественные числа, также будет решением* ЛООДУ.

Доказательство непосредственно следует из свойства 3 линейного диф-ференциального оператора n-го порядка.

Теорема13.3. *Если функции* $y_i(x)\,(i = \overline{1,n})$ *являются решениями* ЛООДУ *на промежутке* $x \in (a,b)$ *то следующие утверждения эквивалентны:*

1) $W[y_1(x),\ldots,y_n(x)] = 0$ *для всех* $x \in (a,b)$;

2) найдется хотя бы одно такое $x_0 \in (a,b)$, *что* $W(x_0) = 0$;

3) система функций $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$ *линейно зависима на промежутке* (a,b).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что из 1) следует 2), из 2) следует 3), из 3) следует 1).

а) соотношение $1) \Rightarrow 2)$ очевидно;

б) покажем, что $2) \Rightarrow 3)$. Рассмотрим линейную однородную алгебраическую систему

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

из n уравнений с n неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$. Так как определитель этой системы $\Delta \equiv W(x_0) = 0$, то система имеет хотя бы одно ненулевое решение $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_n^0)$, $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^0)^2 > 0$. Из леммы 13.1 следует, что функция

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 y_i(x)$$

является решением ЛООДУ на промежутке (a,b) и удовлетворяет при $x_0 \in (a,b)$ нулевым начальным условиям. Но единственным решением ЛООДУ на промежутке (a,b) с нулевыми начальными условиями, согласно замечанию 13.2, является тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 y_i(x) \equiv 0,$$

для всех $x \in (a,b)$, где $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^0)^2 > 0$, то есть система функций $\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$ линейно зависима на промежутке (a,b).

в) соотношение $3) \Rightarrow 1)$ вытекает из теоремы 13.2. Теорема доказана.

Следствие 13.3. *Если система решений* $\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$ ЛООДУ *линейно независима на промежутке* (a,b)*, то* $W(x) \neq 0$ *для всех* $x \in (a,b)$.

Определение13.4. Любая система n решений $\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$ ЛООДУ, линейно независимая на промежутке (a,b), называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) уравнения на этом промежутке.

Пример 13.3. Уравнение $y'' - y = 0$ имеет частные решения $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{-x}$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

◄Так как система функций $\{e^x, e^{-x}\}$ линейно независима (см. пример 13.2) на промежутке $(-\infty, +\infty)$, то она представляет собой ФСР данного уравнения на этом промежутке. ■

Теорема 13.4 *Для того, чтобы система решений* $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ ЛООДУ *на промежутке* (a,b) *являлась ФСР уравнения на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского* $W[y_1(x),...,y_n(x)]$ *не равнялся нулю хотя бы в одной точке* $x_0 \in (a,b)$.

Доказательство. Необходимость следует из следствия 13.3. Достаточность вытекает из следствия 13.2.

Теорема 13.5. ЛООДУ *с непрерывными на промежутке* (a,b) *коэффициентами всегда имеет ФСР на этом промежутке.*

Доказательство. Выберем произвольную числовую матрицу

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

с определителем $\det A_{n\times n} \neq 0$ и поставим для ЛООДУ n задач Коши с начальными условиями: при $x_0 \in (a,b)$

$$1)\ \begin{cases} y(x_0) = a_{11} \\ y'(x_0) = a_{21} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n1} \end{cases} 2)\begin{cases} y(x_0) = a_{12} \\ y'(x_0) = a_{22} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n2} \end{cases} \dots n)\begin{cases} y(x_0) = a_{1n} \\ y'(x_0) = a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{nn} \end{cases}$$

По теореме о существовании и единственности каждая из поставленных задач имеет единственное решение на промежутке (a,b). Обозначим эти решения соответственно $y_1(x),...,\ y_n(x)$ и составим определитель Вронского для этих решений в точке $x_0 \in (a,b)$, который совпадает с $\det A_{n\times n} \neq 0$. Из теоремы 13.4 получаем, что найденная система решений $\{y_1(x),...,\ y_n(x)\}$ является ФСР ЛООДУ на промежутке (a,b). Теорема доказана.

Теорема 13.6. *Пусть система решений* $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ ЛООДУ *является* ФСР *этого уравнения на промежутке* (a,b), *тогда общее решение* ЛООДУ *на* (a,b) *имеет вид*

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x),$$

где $C_1,C_2,...,C_n$ – *произвольные постоянные.*

Доказательство. Так как любое решение ЛООДУ на промежутке (a,b) является частным, то достаточно показать, что всякое решение $y_0(x)$ задачи Коши с начальными условиями $x_0\in(a,b)$,

$$y_0(x_0)=y_0,y_0'(x_0)=y_0',...,y_0^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

имеет вид $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x)$. Составим линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+...+C_ny_n(x_0)=y_0 \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+...+C_ny_n'(x_0)=y_0' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+...+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Поскольку определитель этой системы является определителем Вронского для функций $y_1(x),...,y_n(x)$, являющихся линейно независимыми на промежутке (a,b), то он отличен от нуля в любой точке этого промежутка. Следовательно, рассматриваемая система имеет единственное решение $C_1^0,C_2^0,...,C_n^0$. Тогда

$$y_0(x)\equiv C_1^0y_1(x)+C_2^0y_2(x)+...+C_n^0y_n(x).$$

Действительно, в левой и правой частях этого равенства стоят решения ЛООДУ, начальные условия которых при $x_0\in(a,b)$, совпадают. Согласно теоре-ме о существовании и единственности решения задачи Коши левая и правая части совпадают на всём промежутке (a,b), то есть имеет место требуемое представление. Теорема доказана.

Следствие 13.4. ЛООДУ *не может содержать более чем n линейно независимых решений на промежутке* (a,b).

Теорема 13.7. *Если уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$
$$y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1}(x)y' + q_n(x)y = 0$$

с непрерывными на промежутке (a,b) *коэффициентами* $p_i(x), q_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$, *имеют общую* ФСР $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$ *на этом промежутке, тогда* $p_i(x) \equiv q_i(x)$ *для всех* $i = 1,2,\ldots,n$.

Доказательство. Подставляя решения $y_i(x)\,(i=\overline{1,n})$ из ФСР в эти уравнения и вычитая почленно полученные тождества, получим

$$\left(p_1(x) - q_1(x)\right)y_i^{(n-1)}(x) + \ldots + \left(p_n(x) - q_n(x)\right)y_i(x) \equiv 0.$$

Если предположить, что хотя бы для одной точки $x_0 \in (a,b)$ будет справедливо неравенство $p_1(x_0) \neq q_1(x_0)$, то, в силу непрерывности функций $p_1(x), q_1(x)$, найдутся такие $a_1, b_1 \in (a,b)$, что $x_0 \in (a_1,b_1)$ и $p_1(x) \neq q_1(x)$ для всех $x \in (a_1,b_1)$.

Разделим обе части последнего равенства на $p_1(x) - q_1(x)$, считая $x \in (a_1,b_1)$. Тогда для для всех $x \in (a_1,b_1)$ получим равенство

$$y_i^{(n-1)}(x) + \frac{p_2(x) - q_2(x)}{p_1(x) - q_1(x)}y_i^{(n-2)}(x) + \ldots + \frac{p_n(x) - q_n(x)}{p_1(x) - q_1(x)}y_i(x) \equiv 0,$$

которое показывает, что ЛООДУ $(n-1)$-го порядка

$$y^{(n-1)} + \frac{p_2(x) - q_2(x)}{p_1(x) - q_1(x)}y^{(n-2)} + \ldots + \frac{p_n(x) - q_n(x)}{p_1(x) - q_1(x)}y = 0$$

с непрерывными в интервале (a_1,b_1) коэффициентами имеет n линейно независимых на этом интервале решений $y_i(x)\,(i=\overline{1,n})$, что противоречит следствию13.4. Отсюда получаем, что $p_1(x) \equiv q_1(x)$ для всех $x \in (a,b)$. Рассуждая аналогично, получим $p_i(x) \equiv q_i(x)$ для всех $i = 2,3,\ldots,n$. Теорема доказана.

Следствие 13.5 *Если на промежутке* (a,b) *задана линейно независимая система* n *функций* $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$ *из класса* $C^n_{(a,b)}$, *то можно построить*

ЛООДУ n*-го порядка с непрерывными на некотором интервале* $(a_1,b_1)\subset(a,b)$ *коэффициентами, для которого данная система функций будет* ФСР *на интервале* (a_1,b_1).

Доказательство. В самом деле, так как система функций $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ линейно независима на промежутке (a,b), то, согласно следствию 13.2, существует такое $x_0\in(a,b)$, что $W[y_1(x_0),...,y_n(x_0)]\neq 0$. В силу непрерывности функции $W[y_1(x),...,y_n(x)]$ на (a,b), получаем, что существуют такие $(a_1,b_1)\in(a,b)$, что $x_0\in(a_1,b_1)$ и $W[y_1(x),...,y_n(x)]\neq 0$ для всех $x\in(a_1,b_1)$.

Предположим, что ЛООДУ n-го порядка с требуемыми условиями построено и $y=y(x)$ – любое его решение на интервале (a_1,b_1). Тогда согласно следствиям 13.3 и 13.4 следует, что $W[y_1(x),y_2(x),...,y_n(x),y(x)]=0$ для всех $x\in(a_1,b_1)$, то есть

$$W[y_1(x),...,y_n(x),y(x)]\equiv\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) & y'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \dots & y_n^n(x) & y_1^n(x) \end{pmatrix}=0.$$

Раскладывая этот определитель по элементам последнего столбца, получим уравнение

$$y^{(n)}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} - y^{(n-1)}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^n & y_2^n & \dots & y_n^n \end{pmatrix}+\ldots+$$

$$+(-1)^n y\begin{pmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^n & y_2^n & \dots & y_n^n \end{pmatrix}=0.$$

Коэффициент при $y^{(n)}$ является определителем Вронского $W[y_1,...,y_n]$, от-личным от нуля для всех значений $x \in (a_1,b_1)$. Обозначим определитель при $y^{(n-1)}$ через $K(x)$ и разделим обе части полученного уравнения на функцию $W[y_1,...,y_n] \neq 0$. Получим ЛООДУ n-го порядка с непрерывными на промежутке $(a_1,b_1) \subset (a,b)$ коэффициентами, для которого система функций $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ является ФСР на (a_1,b_1). Следствие доказано.

Пример 13.4 Построим ЛООДУ 2-го порядка, для которого система функ-ций $\{1,x^2\}$ является ФСР на соответствующем промежутке (a_1,b_1).

◀Составим определитель Вронского

$$W[1,x^2] = \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 .$$

Таким образом, в интервалах $x \in (-\infty,0)$ и $x \in (0,+\infty)$ определитель Вронс-кого $W[1,x^2] \neq 0$. Составляя уравнение $W[1,x^2,y(x)] = 0$ и производя деление обеих его частей на функцию $W[1,x^2] = 2x \neq 0$, получим ЛООДУ 2-го порядка $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$ с непрерывными в области $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ коэффициентами, для которого система функций $\{1,x^2\}$ будет ФСР. ■

Теорема 13.8. (Лиувилля-Остроградского) *Если система решений* $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ ЛООДУ n*-го порядка*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

является ФСР *этого уравнения на промежутке* (a,b), *то для всех* $x \in (a,b)$ *имеют место равенства*

$$W[y_1(x),...,y_n(x)] = Ce^{-\int p_1(x)dx},$$

$$W[y_1(x),...,y_n(x)] = W[y_1(x_0),...,y_n(x_0)] \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)dx},$$

где C *– произвольная постоянная.*

Доказательство. Так как система функций $\{y_1(x),...,y_n(x)\}$ является ФСР на промежутке (a,b),то из теоремы 13.7 и следствия из этой теоремы вытекает, что $p_1(x) = -\dfrac{K(x)}{W[y_1(x),...,y_n(x)]}$, где

$$K(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y'(x)_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix} = \frac{d}{dx}W[y_1(x),...,y_n(x)].$$

Последнее равенство следует из формулы дифференцирования функционального определителя. Отсюда получаем уравнение для определения $W[y_1(x),...,y_n(x)]$

$$\frac{dW[y_1(x),...,y_n(x)]}{W[y_1(x),...,y_n(x)]} = -p_1(x)dx,$$

которое после интегрирования даёт требуемые формулы. Теорема доказана.

Теорема Лиувилля-Остроградского имеет непосредственное применение для нахождения общего решения ЛООДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

с непрерывными на промежутке (a,b) коэффициентами, если известно одно его частное решение $y_1(x) \neq 0$ на (a,b).

Следствие 13.6. *Если* $y_1(x) \neq 0$ *является решением* ЛООДУ *2-го порядка, то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y = y_1(x)\left[\int \frac{C_1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_2\right],$$

где C_1, C_2 *– произвольные постоянные.*

Доказательство. Пусть $y = y(x)$ – любое другое решение этого уравнения такое, что $\dfrac{y(x)}{y_1(x)} \not\equiv const$ на промежутке (a,b). Тогда, согласно теореме 13.8 получаем

$$W[y_1(x), y(x)] = \begin{pmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{-\int p_1(x)dx}$$

или

$$y_1(x)y'(x) - y_1'(x)y(x) = C_1 \cdot e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Разделим обе части последнего равенства на функцию $y_1^2(x) \neq 0$. Получим

$$\frac{y_1(x)y'(x) - y_1'(x)y(x)}{y_1^2(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right) = C_1 \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2(x)}.$$

Отсюда получаем общее решение ЛООДУ в виде:

$$y = y_1(x)\left[\int \frac{C_1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_2\right],$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 13.5 Найдём общее решение уравнения

$$xy'' - xy' + y = 0$$

если известно его частное решение $y = x$.

◄Приведем уравнение к канонической форме ЛООДУ 2-го порядка, разделив обе части (43) на функцию $x \neq 0$ в области $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$,

$$y'' - y' + \frac{1}{x} y = 0$$

и применим полученную формулу, где $p_1(x) \equiv -1$. Тогда общее решение ЛООДУ в области $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

$$y = C_1 x \int \frac{e^x}{x^2} dx + C_2 x,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. ■

13.3. Понижение порядка ЛООДУ в случае, когда известны его частные решения

Теорема 13.9 *Замена вида* $y = \varphi(x)\cdot z$*, где* $\varphi(x) \in C^n_{(a,b)}$ *и* $\varphi(x) \neq 0$*, для каждого* $x \in (a,b)$ *переводит* ЛООДУ

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

с непрерывными на промежутке (a,b) *коэффициентами в* ЛООДУ

$$L_n^*[z] \equiv z^{(n)} + q_1(x)z^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1}(x)z' + q_n(x)z = 0$$

с непрерывными на (a,b) *коэффициентами.*

Доказательство. Для нахождения производной $y^{(k)} = \left(\varphi(x)\cdot z\right)^{(k)}$ вос-пользуемся формулой Лейбница:

$$\left(\varphi(x)\cdot z\right)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i z^{(i)} \varphi^{(k-i)}(x), (k = \overline{1,n}).$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, и собирая коэффициенты при $z^{(k)}, (k = \overline{1,n})$, получим уравнение

$$\varphi(x)z^{(n)} + [\varphi(x) + n\varphi'(x)]z^{(n-1)} + \ldots. + L_n[\varphi(x)]z = 0$$

с непрерывными на промежутке (a,b) коэффициентами. Разделим обе части этого уравнения на функцию $\varphi(x) \neq 0$. Получим ЛООДУ требуемого вида с непрерывными на промежутке (a,b) коэффициентами. Теорема доказана.

Следствие 13.7 *Если функция* $y = \varphi(x)$*, не равная нулю на промежутке* (a,b)*, является решением* ЛООДУ, *то рассматриваемая замена преобразует уравнение к виду*

$$z^{(n)} + q_1(x)z^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1}(x)z' = 0.$$

Переходя теперь к новой функции $u(x)=z'_x(x)$, *получим* ЛООДУ $(n-1)$*-го порядка.*

Следствие 13.8 *Если известны два линейно независимых и отличных от нуля на промежутке* (a,b), *решения* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ ЛООДУ, *то производя последовательно замены* $y=y_1(x)z$ *и* $u=z'_x$, *получим* ЛООДУ $(n-1)$*-го порядка*

$$u^{(n-1)}+q_1(x)u^{(n-2)}+\ldots+q_n(x)u=0.$$

Так как $y_2(x)$ *является решением исходного* ЛООДУ, *то, согласно указанным заменам, функция* $u_1(x)=\left(\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)'_x\not\equiv 0$ *будет решением последнего* ЛООДУ. *Рассуждая аналогично, понижаем порядок уравнения еще на единицу. В итоге мы получим* ЛООДУ $(n-2)$*-го порядка.*

Заметим, что если известны $k<n$, линейно независимых на промежутке (a,b) решений ЛООДУ, то можно понизить порядок этого уравнения на $(n-k)$ единиц.

Пример 13.6. Рассмотрим уравнение $xy''-xy'+y=0$.

◄Это уравнение имеет частное решение $y=x$. С помощью рассматриваемой замены оно приводится к уравнению

$$x^2z''+x(2-x)z'=0,$$

которое после подстановки $u=z'_x$, преобразуется в уравнение первого порядка

$$x^2u'+x(2-x)u=0$$

с разделяющимися переменными. Интегрируя последнее уравнение и возвращаясь к $y(x)$, получим в области $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ общее решение исходного уравнения. ■

14. ЛНОДУ n -го порядка с непрерывными коэффициентами и правой частью

Рассмотрим ЛНОДУ n -го порядка

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x)$$

и соответствующее ему ЛООДУ n -го порядка

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

где функции $p_i(x), (i = \overline{1,n})$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке (a,b) и $g(x) \neq 0$ для всех $x \in (a,b)$.

Теорема 14.1. *Общее решение* ЛНОДУ *на промежутке* (a,b) *представляет собой сумму общего решения* ЛООДУ *и любого частного решения* $y = \varphi(x)$ ЛНОДУ.

Доказательство. Произведём в уравнении

$$L_n[y(x)] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x)$$

замену функции по формуле

$$y(x) = \bar{y}(x) + \varphi(x),$$

где $\bar{y}(x)$ – общее решение ЛООДУ

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0.$$

Тогда, в силу свойства 2) линейного дифференциального оператора n-го порядка, получим соотношение

$$L_n[y(x)] = L_n[\bar{y}(x) + \varphi(x)] = L_n[\bar{y}(x)] + L_n[\varphi(x)] = g(x).$$

Так как по условию теоремы $L_n[\varphi(x)] \equiv g(x)$, а $L_n[\bar{y}(x)] \equiv 0$ то получаем, что $y(x) = \bar{y}(x) + \varphi(x)$ является решением исходного ЛНОДУ.

Общее решение ЛООДУ имеет вид

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ есть ФСР на промежутке (a,b), а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные. Покажем теперь, что

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) + \varphi(x)$$

является общим решением ЛНОДУ.

В самом деле, поставим для ЛНОДУ задачу Коши с произвольными начальными условиями: при $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ при $x_0 \in (a,b)$

и покажем, что единственным решением этой задачи будет функция

$$\tilde{y}(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x) + \varphi(x),$$

где $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ – фиксированные числовые значения, система функций $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ $< a,b >$, функция $\varphi(x)$ – любое частное решение ЛНОДУ. Составим систему линейных алгебраических уравнений относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 - \varphi(x_0) \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \ldots + C_n y'_n(x_0) = y'_0 - \varphi'(x_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - \varphi^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Так как определитель этой системы есть определитель Вронского для системы функций $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$, взятый в точке $x_0 \in (a,b)$, то он отличен от нуля, поскольку эта система функций суть ФСР. Отсюда получаем, что система имеет единственное решение $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$, а соответствующая задача Коши имеет единственное решение. Теорема доказана.

Пример 14.1. Уравнение $y'' - y = x$ имеет частное решение $\varphi(x) = -x$ на интервале $x \in (-\infty, +\infty)$.

◄Система функций $\{e^x, e^{-x}\}$ является ФСР ЛООДУ $y'' - y = 0$ на интервале $(-\infty, +\infty)$. Тогда общее решение ЛНОДУ на всей вещественной оси $x \in (-\infty, +\infty)$, согласно предыдущей теореме, имеет вид

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Поставим для этого уравнения задачу Коши с произвольными начальными условиями, например при $y(0)=1, y'(0)=0$.

Тогда для определения C_1, C_2 получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1^0 = 1 \\ C_2^0 = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, искомое решение задачи Коши будет $\tilde{y}(x) = e^x - x$. ■

Теорема 14.2. (принцип суперпозиции). *Пусть правая часть* ЛНОДУ *имеет вид:*

$$g(x) \equiv \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_m f_m(x),$$

где $\alpha_i (i = \overline{1,m})$ *– вещественные постоянные, и пусть функции* $y = \varphi_i(x)$ $(i = \overline{1,m})$ *являются частными решениями соответствующих уравнений*

$$L_n[y] = f_i(x), (i = \overline{1,m}).$$

Тогда функция

$$\varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + ... + \alpha_m \varphi_m(x)$$

является частным решением ЛНОДУ *с правой частью указанного вида..*

Доказательство непосредственно следует из свойства 3) линейного дифференциального оператора n-го порядка.

Пример 14.2. Раасмотрим уравнение $y'' - y = 2x + 3e^{2x}$.

◄Для нахождения частного решения этого уравнения, найдём частные решения уравнений $y'' - y = 2x$ и $y'' - y = 3e^{2x}$, которые соответственно будут $y_1(x) = -2x$ и $y_2(x) = e^{2x}$. Тогда, согласно предыдущей теореме, частное решение ЛНОДУ имеет вид:

$$\overline{y}(x) = -2x + e^{2x}.$$

Так как соответствующее ЛООДУ

$$y'' - y = 0$$

имеет общее решение

$$\tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, то общее решение ЛНОДУ, согласно теореме 14.2, имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x + e^{2x}. \ ■$$

Заметим, что во всех предыдущих примерах мы считали известными частные решения ЛНОДУ. В тех же случаях, когда найти частное решение затруднительно, применяют метод вариации произвольных постоянных.

Теорема 14.3. *Если система функций* $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ *есть* ФСР *уравнения* $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$ *на промежутке* (a,b), *то общее решение соответствующего* ЛНОДУ *всегда можно найти в виде*

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x),$$

где $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ *некоторые функции из класса* $C^1_{(a,b)}$.

Доказательство. Для определения неизвестных функций $C_1(x), ..., C_n(x)$ построим систему n алгебраических уравнений, линейных относительно $C_1'(x), C_2'(x), ..., C_n'(x)$, с отличным от нуля определителем и ненулевым столбцом свободных членов. Построение проведём следующим образом. Дифференцируем выражение $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x)$ до $(n-1)$-го порядка включительно и на каждом шаге приравниваем к нулю сумму слагаемых, содержащих производные функций $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$. Имеем

$$
\begin{cases}
y'(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) \\
y''(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) \\
y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x)
\end{cases}
$$

Отсюда получаем систему из $n-1$ уравнения

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) = 0 \\
\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) = 0
\end{cases}
$$

Подставляя выражения для производных $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ с выписанными в предыдущей системе условиями в ЛНОДУ, получим n-ое, линейное относительно $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$, уравнение, которое присоединим к системе:

$$
\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{j=1}^{n} p_j(x) \left[\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-j)}(x) \right] \equiv g(x)
$$

или

$$
\sum_{i=1}^{n} C_i(x) L_n[y_i(x)] + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) \equiv g(x).
$$

Так как $L_n[y_i(x)] \equiv 0$, то получаем

$$
\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) \equiv g(x).
$$

Таким образом, получаем линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) \equiv g(x) \end{cases}$$

с определителем, равным определителю Вронского для системы функций, являю-щихся ФСР для ЛООДУ на промежутке (a,b), и поэтому отличному от нуля на этом промежутке. Отсюда следует, что построенная система имеет единственное решение на промежутке (a,b)

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), C_2'(x) = \varphi_2(x), \dots C_n'(x) = \varphi_n(x)$$

или после интегрирования

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + \overline{C}_1, C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + \overline{C}_2, \dots, C_n(x) = \int \varphi_n(x)dx + \overline{C}_n,$$

где $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \dots, \overline{C}_n$ – произвольные постоянные.

По построению функции $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ таковы, что при подстановке в выражение $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$ мы получаем решение ЛНОДУ, зависящее от n произвольных постоянных. Покажем, что оно будет общим решением ЛНОДУ на промежутке (a,b). Подставим найденные выражения для $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{C}_i y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \varphi_i(x)dx,$$

которое представляется в виде суммы общего решения ЛООДУ и частного решения ЛНОДУ. Согласно теореме 14.1, это и есть общее решение ЛНОДУ на промежутке (a,b). Теорема доказана.

Пример 14.3. Найти общее решение уравнения $y'' - y = x$,используя метод вариации произвольных постоянных.

◀Для этого находим общее решение соответствующего ЛООДУ $y'' - y = 0$, которое имеет вид $y_{o.o.}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Будем искать общее решение уравнения в виде $y(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$. Для нахождения $C_1(x), C_2(x)$ составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = x, \end{cases}$$

разрешая которую, находим

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}xe^{-x}, C_2'(x) = -\frac{1}{2}xe^x$$

или, после интегрирования,

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} + \overline{C}_1, C_2(x) = -\frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^x + \overline{C}_2.$$

Следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y(x) = \overline{C}_1 e^x + \overline{C}_2 e^{-x} - x,$$

где $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ – произвольные постоянные. ■

Пример 14.4 Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$, используя метод вариации произвольных постоянных.

◀Для этого находим общее решение соответствующего ЛООДУ $y'' - 2y' + y = 0$, которое имеет вид $y_{o.o.}(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x$.

Будем искать общее решение уравнения в виде $y(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$. Для нахождения $C_1(x), C_2(x)$ составим систему

$$\begin{cases} c_1'e^x + c_2'xe^x = 0, \\ c_1'e^x + c_2'(1+x)e^x = \dfrac{e^x}{x}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} c_1' + c_2'x = 0, \\ c_1' + c_2'(1+x) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$c_2' = \frac{1}{x}, c_2 = \ln|x| + C_2,$$

$$c_1' = -1, c_1 = -x + C_1,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Таким образом, найдено общее решение исходного уравнения: $y = e^x(x\ln|x| - x + C_1x + C_2)$. ■

Пример 14.5. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$, используя метод вариации произвольных постоянных.

◄Для этого находим общее решение соответствующего ЛООДУ $y'' + y = 0.$, которое имеет вид $y_{o.o.}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Будем искать общее решение уравнения в виде $y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Для нахождения $C_1(x), C_2(x)$ составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} C_2'(x) = -C_1'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -C_1'(x)\sin x - C_1'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{-C_1'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ C_2'(x) = \cos x(x - \sin 2x) \end{cases}$$

Из соотношения $C_1'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$ найдем функцию $C_1(x)$.

$$C_1(x) = \int\left(2\sin^2 x\cos x - x\sin x\right)dx = 2\int\sin^2 x\cos x dx - \int x\sin x dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sin^3 x - \int x\sin x dx = \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \sin x dx; \\ du = dx; & v = -\cos x \end{Bmatrix} = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int\cos x dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1.$$

Теперь находим $C_2(x)$.

$$C_2(x)=\int x\cos x dx-2\int \cos^2 x\sin x dx=\begin{Bmatrix} u=x; & dv=\cos x dx; \\ du=dx; & v=\sin x; \end{Bmatrix}=$$

$$=x\sin x-\int \sin x dx+\frac{2}{3}\cos^3 x==\frac{2}{3}\cos^3 x+x\sin x+\cos x+C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения:

$$y=\frac{2}{3}\sin^3 x\cos x+x\cos^2 x-\sin x\cos x+C_1\cos x+\frac{2}{3}\sin x\cos^3 x+$$
$$+x\sin^2 x+\sin x\cos x+C_2\sin x=$$

$$=\frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)+x(\sin^2 x+\cos^2 x)+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Окончательно

$$y=\frac{1}{3}\sin 2x+x+C_1\cos x+C_2\sin x. \blacksquare$$

Пример 14.6. Решить уравнение $y''-y'=ch2x$, используя метод вариации произвольных постоянных.

◀Для этого находим общее решение соответствующего ЛООДУ $y''-y'=0$, которое имеет вид $y_{o.o.}(x)=C_1+C_2e^x$.

Будем искать общее решение уравнения в виде $y(x)=C_1(x)+C_2(x)e^x$. Для нахождения $C_1(x),C_2(x)$ составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)+C_2'(x)e^x=0, \\ C_2'(x)e^x=ch2x. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)=-ch2x, \\ C_2'(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}e^{-x}dx, \end{cases}$$

откуда

$$C_1(x)=\frac{1}{2}sh2x+C_1,$$

Из соотношения $C_2'(x)=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}e^{-x}dx$ найдем функцию $C_2(x)$.

$$C_2(x)=\int\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}e^{-x}dx=-\int\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}d\left(e^{-x}\right)=\left\{e^{-x}=t\right\}=-\frac{1}{2}\int\left(t^{-2}+t^2\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{t}\right)+C_2=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-3x}}{3}-e^x\right)+C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения:

$$y=C_1+C_2e^x=\frac{1}{2}sh2x+C_1-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2x}}{3}-e^{2x}\right)+C_2e^x=$$

$$=C_1+C_2e^x+\frac{1}{2}sh2x-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2x}-3e^{2x}}{3}\right)=$$

$$=C_1+C_2e^x+\frac{1}{6}sh2x+\frac{e^{2x}}{3}.$$

Окончательно

$$y=C_1+C_2e^x+\frac{1}{6}sh2x+\frac{e^{2x}}{3}.\ \blacksquare$$

14.2. Комплексные функции действительного переменного

Символом $\mathbb{C}$ будем обозначать множество комплексных чисел $z=x+iy$, где $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ и $i^2=-1$, в котором обычным образом определены операции сложения, умножения, деления и т.д., а также введено понятие модуля числа z как $|z|\equiv\sqrt{x^2+y^2}$. Действительные числа x и y называют соответственно реальной и мнимой частями комплексного числа $z=x+iy$ и пишут $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$. Заметим, что два любых комплексных числа z_1, z_2

равны между собой тогда и только тогда, когда равны их реальные и мнимые части, то есть $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Каждому числу $z = x + iy$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие упорядоченную пару действительных чисел $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ или точку M на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y). Так как прямоугольные координаты связаны с полярными координатами по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, то комплексное число $z = x + iy$ можно записать в так называемой тригоно-метрической форме $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, причем, по договорённости, считаем $-\pi < \varphi \le \pi$ (с точностью до периода $2k\pi, k \in \mathbf{Z}$). Число φ называют аргументом комплексного числа z и пишут $\varphi = \arg z$.

Пример14.7. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 - i$.

◀Определим $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Аргумент φ находим из равенств $\cos \varphi = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \varphi = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ и условия $-\pi < \varphi \le \pi$, получим $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$. Таким образом, $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i \sin(-\dfrac{\pi}{4})\right)$. ■

Если $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ два любых комплексных числа, то имеют место равенства:

$$1) z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right);$$

$$2) \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right);$$

$$3) z_1^n = \rho_1^n \left(\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1\right);$$

$$4) \sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1}\left(\cos \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right), (k = 0, 1, 2, ..., (n-1)).$$

Для любого комплексного числа $z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ справедлива формула Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, с помощью которой комплексное число z можно записать в показательной форме $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$. Заметим, что $e^{2\pi i} = 1$. Справедливы также соотношения:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Любая комплекснозначная функция $f(x)$ действительного переменного x единственным образом может быть представлена в виде:

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

где $u(x), v(x)$ – действительнозначные функции от x.

Если функции $u(x), v(x)$ дифференцируемы до n-го порядка, то по определению принимаем

$$f^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x).$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор n-го порядка

$$L_n[\,] = \frac{d^n[\,]}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}[\,]}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d[\,]}{dx} + p_n(x)\cdot[\,],$$

с непрерывными на интервале (a,b) действительными коэффициентами, опре- делённый на классе функций $y(x) \in C^n_{(a,b)}$. Пользуясь свойствами оператора $L_n[\,]$, для дифференцируемой до n-го порядка функции $f(x)$ найдём:

1) $L_n[f(x)] = L_n[u(x)] + iL_n[v(x)]$;

2) $\operatorname{Re} L_n[f(x)] = L_n[\operatorname{Re} f(x)] = L_n[u(x)]$;

3) $\operatorname{Im} L_n[f(x)] = L_n[\operatorname{Im} f(x)] = L_n[v(x)]$.

То есть Re и Im можно выносить из под знака оператора $L_n[\,]$.

Лемма 14.1. *Если комплекснозначная функция* $y = f(x)$ *действительного переменного* x, *непрерывно дифференцируемая до* n*-го порядка включительно на интервале* (a,b), *является решением* ЛООДУ $L_n[y] = 0$ *с действительными коэффициентами, то функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *также будут решениями этого уравнения на* (a,b).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Имеем

$$L_n[f(x)] \equiv L_n[u(x)] + iL_n[v(x)] \equiv 0.$$

Применяя правило равенства двух комплексных чисел, получаем тождества

$$L_n[u(x)] \equiv 0, L_n[v(x)] \equiv 0,$$

из которых следует утверждение леммы 4.2.

Пример 14.7. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{\lambda x}$, где $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

◀Выделим реальную и мнимую части:

$$f(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

По определению производной находим

$$f'_x(x) = u'_x(x) + iv'_x(x) = \left(e^{\alpha x}\cos\beta x\right)'_x + i\left(e^{\alpha x}\sin\beta x\right)_x =$$

$$= \left(\alpha + i\beta\right)\cdot\left(e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x\right) = \left(\alpha + i\beta\right)\cdot e^{(\alpha+i\beta)x} = \lambda\cdot e^{\lambda x}. \blacksquare$$

Пример 14.8. Рассмотрим функцию $f(x) \equiv P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$, являющуюся полиномом n-ой степени относительно x с вообще говоря комплексными коэффициентами $a_i\left(i = 0,1,2,...,n\right)$.

◀Имеем

$$f(x) \equiv P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i \operatorname{Re} a_i + i\sum_{i=0}^{n} x^i \operatorname{Im} a_i = p_n(x) + iq_n(x),$$

где $p_n(x), q_n(x)$ – вещественные полиномы от x. Производная имеет вид:

$$f'_x(x) = \left(p_n(x)\right)'_x + i\left(q_n(x)\right)'_x. \blacksquare$$

Пример 14.9. Рассмотрим функцию $f(x) = P_n(x)\cdot e^{\lambda x}$, которую назовём квазиполиномом от x. Здесь

$P_n(x) = p_n(x) + iq_n(x)$, $p_n(x)$ и $q_n(x)$ – действительные функции действительного аргумента $x \in \mathbb{R}$, $\lambda = \alpha + i\beta, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$

◀Выделим реальную и мнимую части квазиполинома:

$$P_n(x)\cdot e^{\lambda x}=\left(p_n(x)+iq_n(x)\right)\cdot\left(e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x\right)=$$

$$=p_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x-q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x+i\left(p_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x+q_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x\right).$$

Производная квазиполинома по x имеет следующий вид:

$$\left(P_n(x)\cdot e^{\lambda x}\right)'_x=\left(P_n(x)\right)'_x e^{\lambda x}+\lambda P_n(x)e^{\lambda x}=Q_n(x)\cdot e^{\lambda x},$$

где полином $Q_n(x)$ имеет ту же степень, что и $P_n(x)$. ■

Теорема 14.4 *Пусть $\lambda_i (i=\overline{1,n})$ – попарно различные комплексные числа, а $P_{m_1}(x),P_{m_2}(x),...,P_{m_n}(x)$ – комплекснозначные полиномы от вещественной переменной x. Тогда равенство*

$$P_{m_1}(x)\cdot e^{\lambda_1 x}+P_{m_2}(x)\cdot e^{\lambda_2 x}+...+P_{m_n}(x)\cdot e^{\lambda_n x}\equiv 0$$

имеет место для всех вещественных x в том и только в том случае, когда все коэффициенты полиномов $P_{m_i}(x),(i=\overline{1,n})$ одновременно равны нулю.

Последнее означает, что система функций $\left\{P_{m_1}(x)e^{\lambda_1 x},...,P_{m_n}(x)e^{\lambda_n x}\right\}$ – линейно независима на интервале $(-\infty,+\infty)$, если все $\lambda_i (i=\overline{1,n})$ – попарно различны.

Доказательство. В предположении противного, равенство

$$P_{m_1}(x)\cdot e^{\lambda_1 x}+P_{m_2}(x)\cdot e^{\lambda_2 x}+...+P_{m_n}(x)\cdot e^{\lambda_n x}\equiv 0$$

справедливо для $x\in(-\infty,+\infty)$, когда некоторые коэффициенты полиномов $P_{m_i}(x)$ не равны нулю. Не нарушая общности предположим, что полином $P_{m_n}(x)$ имеет не равный нулю коэффициент при старшей степени. Разделим обе части этого равенства на $e^{\lambda_1 x}\neq 0$ и продифференцируем m_1+1 раз по x, получим

$$P^{(1)}_{m_2}(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}+...+P^{(1)}_{m_n}(x)e^{(\lambda_n-\lambda_1)x}\equiv 0,$$

где полиномы $P_{m_i}^{(1)}(x), (i=\overline{2,n})$ имеют соответственно степени m_i и коэффициент при старшей степени полинома $P_{m_n}^{(1)}(x)$ отличен от нуля.

Разделим обе части полученного равенства на функцию $e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \neq 0$ и продифференцируем полученное тождество m_2+1 раз по x. Получим равенство

$$P_{m_3}^{(2)}(x)e^{(\lambda_3-\lambda_2)x}+\ldots+P_{m_n}^{(2)}(x)e^{(\lambda_n-\lambda_2)x} \equiv 0,$$

в котором $P_{m_i}^{(2)}(x), (i=\overline{3,n})$ – полиномы степени m_i относительно x и коэффициент при старшей степени полинома $P_{m_n}^{(2)}(x)$ отличен от нуля. Продолжая этот процесс, мы после $(n-1)$-го шага получим равенство

$$P_{m_n}^{(n-1)}(x)\cdot e^{(\lambda_n-\lambda_{n-1})x} \equiv 0,$$

справедливое для всех $x \in (-\infty,+\infty)$, причём коэффициент при старшей степени полинома $P_{m_n}^{(n-1)}(x)$ отличен от нуля, то есть $P_{m_n}^{(n-1)}(x) \not\equiv 0$. Так как функция $e^{(\lambda_n-\lambda_{n-1})x} \neq 0$, то получаем противоречие. Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

15. ЛООДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

1. Операторные многочлены и их свойства. Рассмотрим линейный диф-ференциальный оператор $L_n[\,]$ n-го порядка с постоянными вещественными коэффициентами $a_i\,(i=\overline{1,n})$

$$L_n[\,]=\frac{d^n[\,]}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}[\,]}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}[\,]}{dx^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}\frac{d[\,]}{dx}+a_n[\,],$$

определённый на классе функций $y(x)\in C^n_{(-\infty,+\infty)}$.

Введем обозначения

$$\frac{d}{dx}=D,\ \frac{d^2}{dx^2}=D^2,\ldots\frac{d^n}{dx^n}=D^n$$

Определение 15.1. Выражение

$$M(D)=D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\ldots+a_{n-1}D+a_n=\sum_{k=0}^{n}a_kD^{n-k}$$

называется *операторным многочленом*, определённом на множестве функций $y(x)\in C^n_{(-\infty,+\infty)}$, то есть для всех вещественных x справедливо тождество

$$L_n[y(x)]\equiv M(D)y(x)\equiv\sum_{k=0}^{n}a_kD^{n-k}y(x),\,(a_0=1).$$

Определение 15.2. Определим операции сложения и умножения оператор-ных многочленов посредством следующих равенств:

$$\left[M_1(D)+M_2(D)\right]y(x)=M_1(D)y(x)+M_2(D)y(x) \text{ для } y(x)\in C^n_{\mathbb{R}},$$

$$\left[M_1(D)\cdot M_2(D)\right]y(x)=M_1(D)\left[M_2(D)y(x)\right] \text{ для } y(x)\in C^n_{\mathbb{R}}.$$

Введенные операции обладают следующими свойствами:

Свойство 1.

$\left(M(D)(\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x))=\lambda_1 M(D)y_1(x)+\lambda_2 M(D)y_2(x)\right)$ для всяких $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ и $y_1(x),y_2(x)\in C^n_{\mathbf{R}}$.

Это равенство следует из свойства 3) линейного дифференциального оператора n-го порядка.

Свойство 2. Операция сложения операторных многочленов, определяемая равенством, обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Свойство 3. Операция умножения операторных многочленов, определяе-мая равенством (81), обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Доказательство. Покажем коммутативность операции умножения:

$$\left[M_1(D)\cdot M_2(D)\right]y(x)=\left[\left(\sum_{k=0}^{n}a_kD^{n-k}\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{m}b_iD^{m-i}\right)\right]y(x)=$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}a_kD^{n-k}\right)\left[\sum_{i=0}^{m}b_iD^{m-i}y(x)\right]=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}a_kb_iD^{n+m-k-i}y(x)=$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{m}b_iD^{m-i}\right)\left[\sum_{k=0}^{n}a_kD^{n-k}y(x)\right]=\left[M_2(D)\cdot M_1(D)\right]y(x).$$

Ассоциативность следует из равенств:

$$\left[\left(M_1(D)\cdot M_2(D)\right)\cdot M_3(D)\right]y(x)=\left[M_1(D)\cdot M_2(D)\right]\left(M_3(D)y(x)\right)=$$

$$M_1(D)\left[M_2(D)\cdot M_3(D)y(x)\right]=\left[M_1(D)\cdot\left(M_2(D)\cdot M_3(D)\right)\right]y(x).$$

Свойство 4. Для операторных многочленов справедлив дистрибутивный закон:

$$\left[M_1(D)\cdot\left(M_2(D)+M_3(D)\right)\right]y(x)=\left[M_1(D)\cdot M_2(D)+M_1(D)\cdot M_3(D)\right]y(x).$$

Доказательство.

$$\left[M_1(D)\cdot\left(M_2(D)+M_3(D)\right)\right]y(x)=M_1(D)\left[\left(M_2(D)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+M_3(D)\right)y(x)\right]=M_1(D)\left[M_2(D)y(x)+M_3(D)y(x)\right]=M_1(D)\left[M_2(D)y(x)\right]+$$

$$+M_1(D)\left[M_3(D)y(x)\right]=\left[M_1(D)\cdot M_2(D)\right]y(x)+\left[M_1(D)\cdot M_3(D)\right]y(x)=$$

$$=\left[M_1(D)\cdot M_2(D)+M_1(D)\cdot M_3(D)\right]y(x).$$

Из свойств 1-4 следует, что действия над операторными многочленами подчиняются тем же законам, что и действия над обычными многочленами над полем комплексных чисел.

Определение 15.3. Многочлен

$$M(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n,$$

где все $a_i\,(i=\overline{1,n})$ – действительные числа будем называть *характеристическим многочленом* ЛООДУ с постоянными коэффициентами

$$M(D)y=D^n y+a_1D^{n-1}y+a_2D^{n-2}y+\ldots+a_{n-1}Dy+a_ny=0.$$

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ – корни этого многочлена кратностей $m_1,m_2,\ldots,m_k$ соответственно. Тогда, согласно основной теоремы алгебры,

$$M(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k},\; m_1+m_2+\ldots+m_k=n.$$

Так как действия над операторными многочленами подчиняются тем же правилам, что и действия над обычными многочленами, то имеет место равенство

$$M(D) = (D-\lambda_1)^{m_1} \cdot (D-\lambda_2)^{m_2} \cdots (D-\lambda_k)^{m_k}.$$

Используя это представление, запишем ЛООДУ в виде

$$M(D)y = (D-\lambda_1)^{m_1} \cdot (D-\lambda_2)^{m_2} \cdots (D-\lambda_k)^{m_k} y = 0.$$

Лемма 15.1. *Для операторных многочленов справедливы равенства:*

1) $M(D)e^{\lambda x} = e^{\lambda x} M(\lambda)$;

2) $M(D^2)\cos\beta x = M(-\beta^2)\cos\beta x$;

3) $M(D^2)\sin\beta x = M(-\beta^2)\sin\beta x$;

4) $M(D)\left[e^{\lambda x} y(x)\right] = e^{\lambda x} M(D+\lambda) y(x)$ – формула смещения.

Доказательство.

1) $M(D)e^{\lambda x} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k D^{n-k} e^{\lambda x} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k e^{\lambda x} \lambda^{n-k} = e^{\lambda x} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k} = e^{\lambda x} M(\lambda)$;

2) $M(D^2)\cos\beta x = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k D^{2(n-k)} \cos\beta x = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k D^2 \cdot D^2 \cdots D^2 \cos\beta x =$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \left(-\beta^2\right)^{n-k} \cos\beta x = M(-\beta^2)\cos\beta x$;

3) аналогично доказательству второго равенства;

4) $M(D)\left[e^{\lambda x} y(x)\right] = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k D^{n-k}\left(e^{\lambda x} y(x)\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \sum\limits_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^{i} \left(e^{\lambda x}\right)^{(i)} \times$

$\times \left(y(x)\right)^{(n-k-i)} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \sum\limits_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^{i} e^{\lambda x} \lambda^{i} D^{n-k-i} y(x) = e^{\lambda x} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (D+\lambda)^{n-k} y(x) =$

$$= e^{\lambda x} M(D+\lambda) y(x).$$

Пример 15.1. Применить формулу смещения в случае, когда операторный многочлен имеет вид $M(D) = \left(D-1\right)^2$, а число $\lambda = 1$.

◀ $\left(D-1\right)^2 e^x y(x) = e^x D^2 y(x) = e^x y''(x)$. ■

2. Вид общего решения ЛООДУ n-го порядка с постоянными коэффи-циентами в случае, когда все корни характеристического уравнения простые.

Пусть все корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения

$$M(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

попарно различны. Тогда функции

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, ..., y_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

являются решениями ЛООДУ

$$M(D)y = D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + ... + a_{n-1} Dy + a_n y = 0.$$

В самом деле, подставляя функции $y = e^{\lambda_k x}, (k = \overline{1,n})$ в уравнение и используя лемму15.1, получим тождества $M(\lambda_k) \equiv 0$, что и требовалось доказать. Так как система функций $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, ..., y_n(x) = e^{\lambda_n x}$ с попарно различными $\lambda_k, (k = \overline{1,n})$ линейно независима на интервале $(-\infty, +\infty)$, то она будет ФСР рассматриваемого уравнения и поэтому общее решение ЛООДУ имеет вид:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x},$$

где $C_i \, (i = \overline{1,n})$ – произвольные постоянные.

Заметим, что эта формула справедлива как в случае действительных, так и в случае комплексных корней характеристического уравнения. Так, если имеется только одна пара комплексно сопряжённых корней, например, $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, то соответствующая система n линейно независимых на интервале $(-\infty, +\infty)$ вещественных решений ЛООДУ имеет вид:

$$\varphi_1(x) = \tfrac{1}{2} e^{\lambda_1 x} + \tfrac{1}{2} e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x} \cos \beta x;$$

$$\varphi_2(x) = \tfrac{1}{2} e^{\lambda_1 x} - \tfrac{1}{2} e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

$$\varphi_3(x) = e^{\lambda_3 x};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_n(x) = e^{\lambda_n x}.$$

Действительно, матрица перехода от системы линейно независимых на интервале $(-\infty, +\infty)$ решений ЛООДУ к последней системе решений является не-вырожденной и поэтому эта система решений также линейно независима на интервале $(-\infty, +\infty)$. Таким образом, общее решение ЛООДУ в действительной форме имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_3 e^{\lambda_3 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x},$$

где $C_i, (i = \overline{1, n})$ – произвольные постоянные.

Аналогичная ситуация возникает и в случае наличия нескольких пар комплексно сопряженных корней.

3. Вид общего решения ЛООДУ n-го порядка с постоянными коэффи-циентами при наличии кратных корней у характеристического уравнения.

Пусть характеристическое уравнение имеет k различных корней λ_i, $(i = \overline{1, k})$ кратностей $m_i, (i = \overline{1, k})$ соответственно. Так как множители $(D - \lambda_i)^{m_i}, (i = \overline{1, k})$ обладают свойством коммутативности, то в случае выполнения тождества $(D - \lambda_i)^{m_i} y(x) \equiv 0$, будет иметь место тождество

$$(D - \lambda_1)^{m_1} \cdots (D - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} (D - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \cdots (D - \lambda_k)^{m_k} (D - \lambda_i)^{m_i} y(x) \equiv 0,$$

то есть все решения каждого из уравнений

$$(D - \lambda_i)^{m_i} y = 0, (i = \overline{1, k})$$

являются решениями ЛООДУ.

Аналогично, в силу коммутативности операторов $(D - \lambda_i)$, имеем

$$(D - \lambda_i)^{m_i - 1} (D - \lambda_i) y = 0,$$

то есть каждое решение уравнения

$$(D-\lambda_i)y=0, (i=\overline{1,k})$$

является решением предыдущего уравнения. Но последнее уравнение имеет решение $y(x)=e^{\lambda_i x}$. Покажем, что функции $y(x)=x^s e^{\lambda_i x}, (s=0,1,2,...,m_i-1)$ являются решениями предыдущего уравнения. В самом деле, подставляя эти функции получаем тождества

$$(D-\lambda_i)^{m_i}(x^s e^{\lambda_i x})=e^{\lambda_i x}D^{m_i}x^s\equiv 0.$$

Таким образом, каждому корню $\lambda_i (i=\overline{1,k})$ кратности m_i соответствует m_i решений

$$y_1(x)=e^{\lambda_i x}, y_2(x)=xe^{\lambda_i x},..., y_{m_i}(x)=x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}$$

уравнения. Полученная система n решений, линейно независима на интервале $(-\infty,+\infty)$ по теореме о квазиполиномах и поэтому будет ФСР ЛООДУ на этом интервале. Отсюда получаем общее решение ЛООДУ в случае наличия кратных корней у характеристического уравнения

$$y(x)=\sum_{s=1}^{k}P_{m_s-1}(x)e^{\lambda_s x},$$

где полиномы $P_{m_s-1}(x)$ имеют произвольные коэффициенты.

Заметим, что если среди корней характеристического уравнения есть кратные комплексные корни, то при необходимости получения фундаментальной системы действительных решений для ЛООДУ поступают также, как и в случае простых комплексных корней, а именно: пусть числа $\lambda_1=\alpha+i\beta, \lambda_2=\alpha-i\beta$ – корни кратности $m_1=m_2=m$, тогда $2m$ комплекснозначным линейно независимым на интервале $(-\infty,+\infty)$ решениям $y(x)=x^s e^{\lambda_i x}, (s=0,1,2,...,m-1; i=1,2)$ соответствуют $2m$ действительных линейно независимых решения $x^s e^{\alpha x}\cos\beta x, x^s e^{\alpha x}\sin\beta x, (s=0,1,2,...,m-1)$. Отсюда следует, что если характеристическое уравнение имеет p пар комплексно сопряженных корней $\lambda_i^{(1)}=\alpha_i+i\beta_i, \lambda_i^{(2)}=\alpha_i-i\beta_i$ кратностей

$m_i (i=\overline{1,p})$ и q действительных корней $\lambda_s (s=\overline{1,q})$ кратностей m_{p+s}, то общее решение ЛООДУ в действительной форме имеет вид:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{p} e^{\alpha_i x}\left[P_{m_i-1}^{(1)}(x)\cos\beta_i x+P_{m_i-1}^{(2)}(x)\sin\beta_i x\right]+\sum_{s=1}^{q} e^{\lambda_s x}P_{m_{p+s}-1}^{(3)}(x),$$

где полиномы $P_{m_i-1}^{(1)}(x), P_{m_i-1}^{(2)}(x), P_{m_{p+s}-1}^{(3)}(x)$ $(i=\overline{1,p}; s=\overline{1,q})$ имеют произвольные коэффициенты.

Пример 15.2. Найдём общее решение ЛООДУ

$$M(D)y \equiv D(D-2)^3(D^2+4)^2 y=0.$$

◀Корнями соответствующего характеристического уравнения

$$M(\lambda)\equiv \lambda(\lambda-2)^3(\lambda^2+4)^2=0$$

будут числа $\lambda_1=0, \lambda_2=2, \lambda_3=2i, \lambda_4=-2i$, кратности которых соответственно равны $m_1=1, m_2=3, m_3=2, m_4=2$. Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y(x)=C_1+(C_2+C_3x+C_4x^2)e^{2x}+(C_5+C_6x)\cos 2x+(C_7+C_8x)\sin 2x,$$

где $C_i, (i=\overline{1,8})$ – произвольные постоянные. ■

Сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение $e^{\lambda x}$;

б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений:

$$e^{\lambda x}; \quad xe^{\lambda x}; \quad \dots \quad x^{m-1}e^{\lambda x}.$$

в) каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

г) каждой паре m-кратных комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \dots \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \dots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример 15.3. Решить уравнение $y'' - 4y = 0$.

◄Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 4 = 0$, $k_1 = 2$, $k_2 = -2$.

Оба корня действительные, кратности 1. Тогда общее решение данного уравнения можно представить в виде:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}. \ ■$$

Пример 15.4. Решить уравнение $y'' - 5y' + 4 = 0$.

◄Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 5k + 4 = 0$, $D = 25 - 4 \cdot 4 = 9$, $k_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1$, $k_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$.

Оба корня действительные, кратности 1. Тогда общее решение данного уравнения можно представить в виде:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}. \ ■$$

Пример 15.5. Решить уравнение $y'' - 16y' + 64 = 0$.

◄Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 16k + 64 = 0$, $D = 256 - 4 \cdot 64 = 0$, $k_1 = k_2 = 8$.

Корни действительные, кратные. Тогда общее решение данного уравнения можно представить в виде:

$$y = C_1 e^{8x} + xC_2 e^{8x}. \ ■$$

Пример 15.6. Решить уравнение $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$.

◀Составим характеристическое уравнение: $k^3-k^2-8k+12=0$, $(k+3)\left(k^2-4k+4\right)=0$, $k_1=-3,\ k_2=k_3=2$.

Корни действительные, имеем один корень кратности 1 и корень кратности 2. Тогда общее решение данного уравнения можно представить в виде:

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+xC_3e^{2x}. \ ■$$

Пример 15.7. Решить уравнение $y''+9y=0$.

◀Составим характеристическое уравнение: $k^2+16=0$, $D=0-4\cdot16=-64$, $k_1=\dfrac{-8i}{2}=-4i,\ k_2=4i$.

Корни комплексные, кратности 1. Тогда общее решение данного уравнения можно представить в виде:

$$y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x. \ ■$$

Пример 15.8. Решить уравнение $y''-4y'+13y=0$.

◀Составим характеристическое уравнение: $k^2-4k+13=0$, $D=16-4\cdot13=-36$, $k_1=\dfrac{4-6i}{2}=2-3i,\ k_2=\dfrac{4+6i}{2}=2+3i$.

Корни комплексные, кратности 1. Тогда общее решение данного уравнения можно представить в виде:

$$y=e^{2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right). \ ■$$

Пример 15.9. Решить уравнение $y'''-y=0$.

◀Составим характеристическое уравнение: $k^3-1=0$, $(k-1)(k^2+k+1)=0$, $k_1=1$, $k^2+k+1=0$, $D=1-4=-3$, $k_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i;\quad k_3=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{x}+e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]. \ ■$$

Пример 15.10. Решить уравнение $y^{IV} - y = 0$.

◀Составим характеристическое уравнение: $k^4 - 1 = 0$, $(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$.

Общее решение:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x. \ ■$$

Пример 15.11. Решить уравнение $y^V + 9y''' = 0$.

◀Характеристическое уравнение: $k^5 + 9k^3 = 0$, $k^3(k^2 + 9) = 0$, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = 3i$, $k_5 = -3i$.

Общее решение:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x. \ ■$$

Пример 15.12. Решить уравнение $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$.

◀Характеристическое уравнение: $k^4 + 8k^2 + 16 = 0$, $(k^2 + 4)^2 = 0$, $k_1 = k_2 = 2i$, $k_3 = k_4 = -2i$.

Общее решение:

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x\left(C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x\right). \ ■$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти решение линейного однородного уравнения:

1. $y'' + 2y' + 5y = 0$. **2.** $y''' - 7y'' + 6y' = 0$. **3.** $y'' - y' - 2y = 0$. **4.** $y'' + 25y = 0$.

5. $y'' - y' = 0$. **6.** $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$. **7.** $y''' + 3y'' + y' + 3y = 0$.

8. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$. **9.** $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(\pi/6) = 0$, $y'(\pi/6) = e^{\pi/6}$.

10. $9y'' + y = 0$, $y(3\pi/2) = 2$, $y'(3\pi/2) = 0$.

11. $y''' - 2y'' + y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 1$.

12. $y''' - 2'y + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = y''(0) = 1$.

13. $y'' - 7y' + 6y = 0$, $y(0) = -5$, $y'(0) = 0$.

14. $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

15. $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -6$.

16. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

16.1. Общие понятия

Определение 16.1. Системой обыкновенных дифференциальных уравнений называется совокупность соотношений вида

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n', y_1'', y_2'', ..., y_n'', ..., y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, ..., y_n^{(k)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n', y_1'', y_2'', ..., y_n'', ..., y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, ..., y_n^{(k)}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n', y_1'', y_2'', ..., y_n'', ..., y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, ..., y_n^{(k)}) = 0 \end{cases}$$

где $F_1, F_2, ..., F_n$ – известные функции $(k \cdot n + 1)$ переменной

Определение 16.2. *Канонической* системой ОДУ называется система уравнений, разрешенных относительно старшей производной

$$\begin{cases} y_1^{(k)} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n', y_1'', y_2'', ..., y_n'', ..., y_1^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, ..., y_n^{(k-1)}) \\ y_2^{(k)} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n', y_1'', y_2'', ..., y_n'', ..., y_1^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, ..., y_n^{(k-1)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(k)} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n', y_1'', y_2'', ..., y_n'', ..., y_1^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, ..., y_n^{(k-1)}) \end{cases}$$

где $f_1, f_2, ..., f_n$ – известные функции $(k \cdot n - n + 1)$ переменной.

Определение 16.3. Система вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

где $f_1, f_2, ..., f_n$ – известные функции $(n+1)$ переменной называется *нормальной* системой ОДУ. Число n называется порядком системы.

Теорема 16.1. *Каноническую систему всегда можно свести к нормальной системе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения проводится путем введения новых переменных. Покажем, как это делается на примере канонической системы вида

$$\begin{cases} y_1'' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3') \\ y_2'' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3') \\ y_3'' = f_3(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3') \end{cases}$$

Введем новые переменные, полагая $u = y_1'$, $v = y_2'$ и $w = y_3'$. Тогда исходная система преобразуется к системе

$$\begin{cases} y_1' = u \\ y_2' = v \\ y_3' = w \\ u' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, u, v, w) \\ v' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, u, v, w) \\ w' = f_3(x, y_1, y_2, y_3, u, v, w) \end{cases}$$

т.е. преобразуется к нормальной системе.

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только нормальные системы.

Введем в рассмотрение векторы $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\boldsymbol{y}' = (y_1', y_2', ..., y_n')$ и вектор $\boldsymbol{f} = \left(f_1, f_2, ..., f_n\right)$. Тогда нормальную систему можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}).$$

Определение 16.4. Система дифференциальных уравнений называется *линейной*, если она линейна относительно всех неизвестных функций и их производных.

Это означает, что нормальная линейная система имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = f_{11}(x)y_1 + f_{12}(x)y_2 + ... + f_{1n}(x)y_n + g_1(x) \\ y_1' = f_{21}(x)y_1 + f_{22}(x)y_2 + ... + f_{2n}(x)y_n + g_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_{n1}(x)y_1 + f_{n2}(x)y_2 + ... + f_{nn}(x)y_n + g_n(x) \end{cases}$$

Или в векторной форме

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(x),$$

где

$$\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

и $\boldsymbol{g}(x) = (g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x))$.

В частности, система линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + g_i(x), \quad i = 1, 2, ..., n$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(x),$$

где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Линейная система $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(x)$ называется однородной если $\boldsymbol{g}(x) \equiv 0$.

Определение 16.4. *Общим решением* системы дифференциальных уравнений называется система функций

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases},$$

непрерывно дифференцируемых по независимой переменной x и непрерывных относительно *произвольных постоянных* $C_1, C_2, ..., C_n$. При этом указанные функции φ_i, $i = 1, 2, ..., n$ должны обращать систему дифференциальных уравнений в систему тождеств и из них должны получаться все возможные частные решения.

Частным решением системы дифференциальных уравнений называется такое решение системы, которое получается из общего решения при некотором наборе всех произвольных постоянных, включая $\pm\infty$.

Особым решением системы дифференциальных уравнений называется такое решение системы, которое не получается из общего решения ни при некотором наборе произвольных постоянных, включая $\pm\infty$.

Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений формулируется следующим образом. Среди всех решений дифференциальных уравнений найти то, которое удовлетворяет поставленным начальным условиям:

$$y_i\left(x_0\right) = y_{i0},\ i = 1, 2, ..., n.$$

Теорема 16.2. (Коши**)** *Если все функции* $f_i(x,\ y_1,\ y_2, ...,\ y_n)$, $i = 1, 2, ..., n$ *нормальной системы непрерывны вместе со своими частными производными по* y_i, $i = 1, 2, ..., n$ *в некоторой области* D ($n+1$*-мерного пространства*), *то в каждой точке* $M\ (x_0,\ y_{10},\ y_{20}, ...,\ y_{n0})$ *этой области существует, и притом единственное, решение* $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ... $y_n = \varphi_n(x)$, *удовлетворяющее начальным условиям* $y_i\left(x_0\right) = y_{i0}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Решение $\boldsymbol{y}\left(x\right)$ определяет линию в n-мерном пространстве. Это пространство называют *фазовым пространством*, а линию $\boldsymbol{y}\left(x\right)$ называют *фазовой траекторией*.

16.2. Решение системы дифференциальных уравнений первого порядка методом исключения неизвестных.

Метод исключения интегрирования нормальной системы состоит следующем.

1. Дифференцируем по x первое из уравнений:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

2. Заменяем производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из уравнений системы. Получим уравнение:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Дифференцируя это уравнение и поступая аналогично предыдущему, найдем:

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Продолжая далее, таким же образом получим, наконец, уравнение

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

В результате получаем следующую систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

3. Из первых $n-1$ уравнений определим $y_2, y_3, \ldots, y_n$ выразив их через x, y_1 и производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$:

$$\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \end{aligned}$$

4. Подставляя эти выражения в последнее уравнение, получим уравнение n-го порядка для определения y_1.

$$\frac{d^n y_1}{dx^n}=\Phi(x,y_1,y_1',\dots,y_1^{(n-1)}).$$

5. Решая это уравнение, определим y_1:

$$y_1=\psi_1(x,C_1,C_2,\dots,C_n).$$

6. Дифференцируя последнее выражение $n-1$ раз, найдем производные $\frac{dy_1}{dx},\frac{d^2y_1}{dx^2},\dots,\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ как функции от x, и $C_1,C_2,\dots,C_n$.

7. Подставляя эти функции в систему, определяем $y_2,y_3,\dots,y_n$

$$\begin{aligned}
&y_2=\psi_2(x,C_1,C_2,\dots,C_n)\\
&y_3=\psi_3(x,C_1,C_2,\dots,C_n)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_n=\psi_n(x,C_1,C_2,\dots,C_n).
\end{aligned}$$

Для того, чтобы полученное решение удовлетворяло заданным начальным условиям $y_i\left(x_0\right)=y_{i0}$, $i=1,2,\dots,n$, остается лишь найти из уравнений соответствующие значения постоянных $C_1,C_2,\dots,C_n$ (подобно тому, как это делалось в случае одного дифференциального уравнения).

Замечание 16.1 Если нормальная система линейна относительно искомых функций, то и последние уравнения будут линейными.

Пример 16.1 Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=2x-y_1-2y_2\\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx}=-3y_1+y_2+1\end{cases}$$

◀1. Дифференцируем по x первое уравнение системы

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x-y_1-2y_2\right)+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(2x-y_1-2y_2\right)\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(2x-y_1-2y_2\right)\frac{dy_2}{dx}.$$

Получим

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=2-\frac{dy_1}{dx}-2\frac{dy_2}{dx}.$$

2. Заменяем в правой части полученного уравнения производные $\frac{dy_1}{dx},\frac{dy_2}{dx}$ их выражениями $2x-y_1-2y_2$ и $-3y_1+y_2+1$ из заданной системы и приводим подобные члены. В результате имеем линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=-2x+7y_1.$$

Полученное дифференциальное уравнение второго порядка не содержит в данном случае переменной y_2, поэтому отпадает необходимость в выполнении третьего и четвертого шагов.

5. Решаем это уравнение. Перепишем его в виде

$$y_1''-7y_1=-2x$$

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка. Его решение, как известно, складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Решим сначала соответствующее однородное уравнение: $y_1''-7y_1=0$.

Характеристическое уравнение $k^2-7=0$ имеет корни $k_1=\sqrt{7}$,и $k_2=-\sqrt{7}$. Следовательно, частными решениями однородного уравнения будут функции $y_1=e^{\sqrt{7}x}$ и $y_2=e^{-\sqrt{7}x}$, а их линейная комбинация $y=C_1e^{\sqrt{7}\cdot x}+C_2e^{-\sqrt{7}x}$ является общим решением однородного дифференциального уравнения.

Общее решение неоднородного уравнения будем искать методом вариации произвольных постоянных в виде $y=v_1(x)y_1+v_2(x)y_2$, или

$$y=v_1(x)\cdot e^{\sqrt{7}x}+v_2(x)\cdot e^{-\sqrt{7}x}.$$

Для нахождения неизвестных функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$ составим систему уравнений

$$\begin{cases} v_1'(x)e^{\sqrt{7}x}+v_2'(x)e^{-\sqrt{7}x}=0, \\ v_1'(x)\sqrt{7}e^{\sqrt{7}x}+v_2'(x)(-\sqrt{7})e^{-\sqrt{7}x}=-2x. \end{cases}$$

Найдем определитель этой системы

$$W(v_1,v_2)=\begin{vmatrix} e^{\sqrt{7}x} & e^{-\sqrt{7}x} \\ \sqrt{7}e^{\sqrt{7}x} & -\sqrt{7}e^{-\sqrt{7}x} \end{vmatrix}=-2\sqrt{7}\ .$$

Тогда

$$v_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-\sqrt{7}x} \\ -2x & -\sqrt{7}e^{-\sqrt{7}x} \end{vmatrix}}{-2\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{7}}{7}xe^{-\sqrt{7}x},$$

$$v_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^{\sqrt{7}x} & 0 \\ \sqrt{7}e^{\sqrt{7}x} & -2x \end{vmatrix}}{-2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}\cdot x\cdot e^{\sqrt{7}x}=.$$

Интегрируя полученные выражения, будем иметь

$$v_1(x)=\frac{1}{7}xe^{-\sqrt{7}x}+\frac{\sqrt{7}}{49}e^{-\sqrt{7}x}+C_1,\ v_2(x)=\frac{1}{7}xe^{\sqrt{7}x}-\frac{\sqrt{7}}{49}e^{\sqrt{7}x}+C_2\,.$$

Таким образом, общим решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка относительно y_1 будет:

$$y_1=\left(\frac{1}{7}xe^{-\sqrt{7}x}+\frac{\sqrt{7}}{49}e^{-\sqrt{7}x}+C_1\right)\cdot e^{\sqrt{7}x}+\left(\frac{1}{7}xe^{\sqrt{7}x}-\frac{\sqrt{7}}{49}e^{\sqrt{7}x}+C_2\right)\cdot e^{-\sqrt{7}x},$$

или $y_1=\frac{2}{7}x+C_1e^{\sqrt{7}x}+C_2e^{-\sqrt{7}x}$.

6. Дифференцируем y_1 один раз и находим производную $\frac{dy_1}{dx}$:

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{7}x+C_1e^{\sqrt{7}x}+C_2e^{-\sqrt{7}x}\right)=\frac{2}{7}+C_1\sqrt{7}e^{\sqrt{7}x}-C_2\sqrt{7}e^{-\sqrt{7}x}.$$

7. Подставляем найденные выражения для y_1 и $\frac{dy_1}{dx}$ в первое уравнение заданной системы $y_2 = -\frac{dy_1}{dx} + 2x - \frac{1}{2}y_1$ и получим после несложных преобразований:

$$y_2 = \frac{6}{7}x - \frac{1}{2}C_1 e^{\sqrt{7}x}(\sqrt{7}+1) + \frac{1}{2}C_2 e^{-\sqrt{7}x}(\sqrt{7}-1) - \frac{1}{7}.$$

Таким образом, решение системы найдено. ■

Пример 16.2. Решить систему

$$\begin{cases} x_t' = y, \\ y_t' = x. \end{cases}$$

◄Дифференцируя первое уравнение системы, получим $x_t'' = y_t'$. Выражая производную y_t' и подставляя ее во второе уравнение, получим однородное линейное уравнение второго порядка относительно одной функции:

$$x_t'' - x = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Поэтому первая из функций, составляющих общее решение, имеет вид

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Дифференцируя, найдем вторую функцию, входящую в решение:

$$y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$ ■

Пример 16.3 Решить систему

$$\begin{cases} x_t' = 3x - 2y \\ y_t' = 2x - y \end{cases}$$

◄Выразим из второго уравнения первую из неизвестных функций:

$$x = \frac{1}{2}\left(y_t' + y\right).$$

Дифференцируя обе части, выразим производную первой из неизвестных функций:

$$x_t' = \frac{1}{2}\left(y_t'' + y_t'\right).$$

Подставляя выражения для x и x_t' в первое уравнение, получим

$$y_t'' - 2y_t' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $(\lambda - 1)^2 = 0$. Следовательно, $\lambda_{1,2} = 1$. Поэтому решение этого уравнения:

$$y = \left(C_1 + C_2 t\right)e^t.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{2}\left(y_t' + y\right) = \frac{1}{2}\left(2C_1 + C_2 + 2C_2 t\right)e^t. \blacksquare$$

Пример 16.4. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_t' = 6x - y \\ y_t' = x + 4y \end{cases}$$

◀Продифференцируем первое уравнение:

$$x_t'' = 6x_t' - y_t'$$

и подставим в это выражение производную из второго уравнения.

$$y_t' = x + 4y$$

Получим:

$$x_t'' = 6x_t' - x - 4y.$$

Подставим сюда y, предварительно выразив его из первого уравнения:

$$x_t'' = 6x_t' - x - 24x + 4x_t',$$

$$x_t'' - 10x_t' + 25x = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 10k + 25 = 0$. Отсюда $k_1 = k_2 = 5$. Поэтому

$$x = Ae^{5t} + Bte^{5t}; \qquad x' = 5Ae^{5t} + Be^{5t} + 5Bte^{5t}.$$

Тогда

$$y = -x_t' + 6x = -5Ae^{5t} - Be^{5t} - 5Bte^{5t} + 6Ae^{5t} + 6Bte^{5t},$$

$$y = Ae^{5t} - Be^{5t} + Bte^{5t}.$$

Обозначив $A = C_1, \quad B = C_2$, получаем решение системы:

$$x = C_1 e^t + C_2 t e^{5t}, \; y = C_1 e^{5t} - C_2 e^{5t} + C_2 t e^{5t}. \; ■$$

Пример 16.5. Решить систему

$$\begin{cases} x_t' = 5x + 2y \\ y_t' = -4x + y \end{cases}$$

◀Продифференцируем первое уравнение:

$$x_t'' = 5x_t' + 2y_t'$$

и подставим в это выражение производную из второго уравнения.

$$y_t' = -4x + y$$

Получим:

$$x_t'' = 5x_t' - 8x + 2y.$$

Подставим сюда y, предварительно выразив его из первого уравнения:

$$y = \frac{x_t' - 5x}{2}$$

$$x_t'' = 5x_t' - 8x + x_t' - 5x,$$

$$x_t'' - 6x_t' + 13x = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$. Отсюда $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. Значит

$$x = e^{5t}\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right).$$

Отсюда

$$x_t' = 5e^{5t}\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right) + e^{5t}\left(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t\right)$$

Тогда

$$y = \frac{x' - 5x}{2} = \frac{e^{5t}\left(\left(5A + 2B\right)\cos 2t + \left(B - 2A\right)\sin 2t\right)}{2}.$$

Обозначив $A = C_1; \quad \frac{1}{2}B = C_2$, получаем решение системы:

$$x = e^{5t}\left(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t\right), \; y = \frac{e^{5t}\left(\left(5C_1 + 2C_2\right)\cos 2t + \left(C_2 - 2C_1\right)\sin 2t\right)}{2}. \; ■$$

Пример 16.6. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_t' = 2x - 3y \\ y_t' = 3x + 2y \end{cases}$$

◀Продифференцируем первое уравнение:

$$x_t'' = 2x_t' - 3y_t'$$

и подставим в это выражение производную из второго уравнения

$$y_t' = 3x + 2y .$$

Получим:

$$x_t'' = 2x_t' - 9x - 6y .$$

Подставим сюда y, предварительно выразив его из первого уравнения:

$$y = \frac{2x - x'}{3}$$

$$x_t'' = 2x_t' - 9x + 2x_t' - 4x ,$$

$$x'' - 4x' + 13x = 0 .$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda k + 13 = 0$. Отсюда $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$. Значит,

$$x = e^{2t}\left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right).$$

Отсюда

$$x' = 2e^{2t}\left(A\cos 3t + B\sin 3t\right) + e^{2t}\left(-3A\sin 3t + 3B\cos 3t\right)$$

Тогда

$$y = \frac{2x - x'}{3} = \frac{2}{3}e^{2t}\left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right) - \frac{2}{3}e^{2t}\left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right) +$$

$$+e^{2t}\left(-C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t\right),$$

$$y = e^{2t}\left(-C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t\right).$$

Получим общее решение системы

$$x = e^{2t}\left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right),\ y = e^{2t}\left(-C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t\right). \ ■$$

Пример 16.7. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_t' = x - y, \\ y_t' = x + z, \\ z_t' = y - x. \end{cases}$$

◀Продифференцируем первое уравнение и подставляем вместо x_t', y_t' и z_t' их значения из системы.

$$x_t' = x - y,$$

$$x_t'' = x_t' - y_t' = x - y - x - z = -y - z,$$

$$x_t'' = -y - z.$$

Далее,

$$x_t''' = -y_t' - z_t' = -x - z - y + x = -y - z,$$

$$x_t''' = -y - z.$$

Вычтем из последнего равенства предпоследнее, получим:

$$x_t''' - x_t'' = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$, $\lambda^2(\lambda - 1) = 0$. Отсюда $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$. Значит

$$x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^t.$$

Поэтому

$$x_t' = C_2 + C_3 e^t, \; x_t'' = C_3 e^t.$$

Тогда из первого уравнения системы получим:

$$y = x - x_t' = C_1 + C_2 t - C_2 - C_3 e^t.$$

Аналогично,

$$z = -y - x_t'' = C_1 - C_2 + C_2 t - C_3 e^t.$$

Тогда решение системы можно записать в виде:

$$x = C_1 + C_2 t + C_3 e^t, \; y = C_1 - C_2 + C_2 t, \; z = C_2 - C_1 - C_2 t - C_3 e^t. \; ■$$

16.3. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера

Рассмотрим нормальную однородную линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Положим, как и ранее, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\boldsymbol{y}' = (y_1', y_2', \ldots, y_n')$ и

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Введем линейный оператор $L[\boldsymbol{y}] = \dfrac{d}{dx}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, тогда система примет вид: $L[\boldsymbol{y}] = 0$. Поскольку введенный оператор обладает свойствами линейности $L[c\boldsymbol{y}] = cL[\boldsymbol{y}]$ и $L[\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2] = L[\boldsymbol{y}_1] + L[\boldsymbol{y}_2]$, то если $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ – решения однородного уравнения $L[\boldsymbol{y}] = 0$, то и их линейная комбинация будет решением того же уравнения.

Определение 16.5. Решения $\boldsymbol{y}_1(x), \ldots, \boldsymbol{y}_m(x)$ однородной системы называются *линейно независимыми* на отрезке $[a,b]$, если в каждой точке $x \in [a,b]$ векторы $\boldsymbol{y}_1(x), \ldots, \boldsymbol{y}_m(x)$ линейно независимы.

Пусть задана система n решений $\boldsymbol{y}_1(x), \ldots, \boldsymbol{y}_m(x)$ однородной системы, определенных на $[a,b]$ $\boldsymbol{y}_i = \{\boldsymbol{y}_{i1}(x), \ldots, \boldsymbol{y}_{in}(x)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Определение 16.6 Определитель

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* системы решений $\boldsymbol{y}_1(x),...,\boldsymbol{y}_n(x)$.

Определение 16.7. Система из n решений однородной системы уравнений, линейно независимых на отрезке $[a,b]$ называется *фундаментальной.*

Определение 16.8. *Общим решением* линейной системы уравнений называется множество всех решений этой системы.

Теорема 16.3. *Пусть* $\boldsymbol{y}_1(x),...,\ \boldsymbol{y}_n(x)$ *– фундаментальная система решений однородной системы уравнений, тогда формула*

$$\boldsymbol{y}(t)=C_1\boldsymbol{y}_1(x)+C_2\boldsymbol{y}_2(x)+...+C_n\boldsymbol{y}_n(x)$$

где $C_1,C_2,...,C_n$ *– произвольные постоянные, дает общее решение этой системы.*

Множество всех решений однородной системы уравнений образует n-мерное векторное пространство, базисом которого может служить любая фундаментальная система решений.

Частное решение однородной системы с постоянными коэффициентами будем искать в виде

$$\boldsymbol{y}_i=\alpha_i e^{\lambda x},\ i=1,2,..,n,$$

где $\alpha_i=const$.

Подставляя функции $\boldsymbol{y}_i$ в систему, получим

$$\alpha_i\lambda e^{\lambda t}=e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j,\ i=1,2,..,n.$$

Сокращая на $e^{\lambda t}\neq 0$ и перенося все слагаемые в левую часть, придем к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_i:

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_{n\alpha} = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-k)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn}-k)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

или в свернутом виде

$$\left(a_{ii}-\lambda\right)\alpha_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\alpha_j = 0,\ i = 1,2,..,n.$$

Определитель матрицы коэффициентов этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Ненулевые решения возможны только тогда, когда он равен нулю. Алгебраическое уравнение n-й степени

$$\Delta = 0$$

называется *характеристическим уравнением* системы. Это уравнение имеет ровно n действительных или комплексных корней λ_i (считая с кратными), называемых *собственными значениями* однородной системы. Каждому корню соответствуют *n собственных функций*

$$y_{ik} = \alpha_{ik} e^{\lambda_i t},$$

где α_{ik} определяются из системы

$$\left(a_{ii}-\lambda\right)\alpha_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\alpha_j = 0;$$

при этом один из коэффициентов α_{ik} берется произвольно, так как в этой системе только $n-1$ независимых уравнений. Если эти собственные функции линейно независимы, то общим решением однородной системы будет их линейная комбинация

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e^{\lambda_i t} ,$$

содержащая n произвольно выбранных коэффициентов. Осталось показать линейную независимость получающихся таким образом решений.

Действительно, если бы существовали числа $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ такие, что $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_{ij} e^{\lambda_i x} = 0$ одновременно для всех $j = 1, 2, ..., n$, то в силу линейной независимости функций $e^{\lambda_i t}$ отсюда следовало бы, что $\beta_i \alpha_{ij}$ для каждого $i = 1, 2, ..., n$. Но поскольку хотя бы одно из $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{in}$ не равно нулю, получаем, что все $\beta_i = 0$, $i = 1, 2, .., n$.

Рассмотрим возможные случаи.

Корни характеристического уравнения действительные и различные. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ корни характеристического уравнения. Для каждого корня λ_i, $i = 1, 2, ..., n$ выпишем систему

$$\left(a_{ii} - \lambda\right)\alpha_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \alpha_j = 0$$

и определим коэффициенты α_{ik}.

Можно показать, что один из них произвольный, его можно считать равным единице. Таким образом, получаем: для корня λ_1 частным решением системы является

$$y_1^{(1)} = \alpha_{11} e^{\lambda_1 x}, y_2^{(1)} = \alpha_{12} e^{\lambda_1 x}, ..., y_n^{(1)} = \alpha_{1n} e^{\lambda_1 x};$$

для корня λ_2 частным решением системы является

$$y_1^{(2)} = \alpha_{21} e^{\lambda_2 x}, y_2^{(2)} = \alpha_{22} e^{\lambda_2 x}, ..., y_n^{(2)} = \alpha_{2n} e^{\lambda_2 x};$$

аналогично, для корня λ_n частным решением системы является

$$y_1^{(n)} = \alpha_{n1} e^{\lambda_n x}, y_2^{(n)} = \alpha_{n2} e^{\lambda_n x}, ..., y_n^{(n)} = \alpha_{nn} e^{\lambda_n x}.$$

Найденные частные решения образуют фундаментальную систему решений, следовательно, общее решение системы можно записать в виде:

$$
\begin{aligned}
&y_1 = C_1\alpha_{11}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_{21}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_{n1}e^{\lambda_n x}\\
&y_2 = C_1\alpha_{12}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_{22}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_{n2}e^{\lambda_n x}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n = C_1\alpha_{1n}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_{2n}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_{nn}e^{\lambda_n x}
\end{aligned}
$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Пример 16.8. Решить систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2\\
\dfrac{dy_2}{dx} = y_2 - 4y_1
\end{cases}
$$

◀Будем решать эту систему методом Эйлера. Согласно этому методу, частные решения системы ищем в виде $y_1 = \alpha_1 e^{\lambda x}$, $y_2 = \alpha_2 e^{\lambda x}$.

Подставляем y_1, y_2 и их производные в заданную систему

$$
\begin{cases}
\lambda\alpha_1 e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\alpha_1 - \alpha_2),\\
\lambda\alpha_2 e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(-4\alpha_1 + \alpha_2).
\end{cases}
$$

Сокращая на $e^{\lambda x} \neq 0$, получаем систему уравнений

$$
\begin{cases}
(\lambda - 1)\alpha_1 + \alpha_2 = 0,\\
4\alpha_1 + (k-1)\alpha_2 = 0.
\end{cases}
$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$
\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0,
$$

или $(\lambda - 1)^2 - 4 = 0$. Корни этого характеристического уравнения $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -1$ простые, следовательно, соответствующие им частные решения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&y_1^{(1)} = \alpha_{11}e^{3x} \quad && y_1^{(2)} = \alpha_{21}e^{-x}\\
&y_2^{(1)} = \alpha_{12}e^{3x} \quad && y_2^{(2)} = \alpha_{22}e^{-x}
\end{aligned}
$$

Связь между коэффициентами α_{ji} найдем, подставив полученные частные решения, например, для y_1 и y_2 в уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} 3\alpha_{11} = \alpha_{11} - \alpha_{12} \\ -\alpha_{22} = \alpha_{22} - \alpha_{21} \end{cases}$$

Вторые уравнения будут следствием записанных. Из полученной системы найдем: $\alpha_{12} = -2\alpha_{11}$ и $\alpha_{22} = 2\alpha_{21}$. В силу произвольности α_{11} и α_{21} можем, например, принять, что $\alpha_{11} = \alpha_{21} = 1$. Тогда $\alpha_{12} = -2$ и $A_{22} = 2$. Тогда общее решение запишется в виде

$$y_1 = C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)}$$

$$y_2 = C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)},$$

или окончательно

$$y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

$$y_2 = -2C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{-x},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. ■

Пример 16.9. Найти решение системы

$$\begin{cases} x_t' = 2x + y \\ y_t' = 3x + 4y \end{cases}$$

◀Характеристическим уравнением этой системы будет

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Корни этого характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 5$ простые, следовательно, соответствующие им частные решения имеют вид:

$$x^{(1)} = \alpha_{11} e^{t} \quad x^{(2)} = \alpha_{21} e^{tx}$$
$$y^{(1)} = \alpha_{12} e^{t} \quad y^{(2)} = \alpha_{22} e^{5t}$$

Связь между коэффициентами α_{ji} найдем, подставив полученные частные решения, например, для x и y в уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{12} = 0 \\ -\alpha_{21} + 2\alpha_{22} = 0 \end{cases}.$$

Вторые уравнения будут следствием записанных. Из полученной системы найдем: $\alpha_{12} = -\alpha_{11}$ и $\alpha_{21} = 2\alpha_{22}$. В силу произвольности α_{11} и α_{21} можем, например, принять, что $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$. Тогда $\alpha_{12} = -1$ и $\alpha_{21} = 2$. Тогда общее решение запишется в виде

$$x = C_1 x^{(1)} + C_2 x^{(2)}$$

$$y = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)},$$

или окончательно

$$y_1 = C_1 e^t + 2C_2 e^{5t}$$

$$y_2 = -C_1 e^t + C_2 e^{5t},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. ■

Пример 16.10. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} y_t' = z + w \\ z_t' = 3y + w \\ w_t' = 3y + z \end{cases}$$

◄Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель третьего порядка по элементам первой строки

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -\lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$-\lambda(\lambda^2 - 1) + 3\lambda + 3 + 3 + 3\lambda = 0,$$

$$\lambda^3 - 7\lambda - 6 = 0.$$

Корни этого характеристического уравнения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ и $\lambda_3 = 3$ простые, следовательно, соответствующие им частные решения имеют вид

$$y^{(1)} = \alpha_{11}e^{-t} \quad y^{(2)} = \alpha_{21}e^{-2t} \quad y^{(3)} = \alpha_{31}e^{3t}$$
$$z^{(1)} = \alpha_{12}e^{-t} \quad z^{(2)} = \alpha_{22}e^{-2t} \quad z^{(3)} = \alpha_{32}e^{3t}$$
$$w^{(1)} = \alpha_{13}e^{-t} \quad w^{(2)} = \alpha_{23}e^{-2t} \quad w^{(3)} = \alpha_{33}e^{3t}$$

Связь между коэффициентами α_{ji} найдем, подставив полученные частные решения, например, для y, z и w в уравнения исходной системы:

Для $\lambda_1 = -1$ имеем

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = 0 \\ 3\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = 0 \\ 3\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = 0 \end{cases}$$

Отсюда $\alpha_{11} = 0,\quad \alpha_{12} = -\alpha_{13}$. Если принять $\alpha_{13} = 1$, то решения в этом случае получаем:

$$y_1 = 0; \quad z_1 = -e^{-x}; \quad w_1 = e^{-x};$$

Для $\lambda_2 = -2$ имеем

$$\begin{cases} 2\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} = 0 \\ 3\alpha_{21} + 2\alpha_{22} + \alpha_{23} = 0 \\ 3\alpha_{21} + \alpha_{22} + 2\alpha_{23} = 0 \end{cases}$$

Если принять $\alpha_{22} = 1$ и $\alpha_{23} = 1$, то $\alpha_{21} = -1$ решения в этом случае получаем:

$$y_2 = -e^{-2x}; \quad z_2 = e^{-2x}; \quad w_2 = e^{-2x};$$

Для $\lambda_3 = 3$ имеем

$$\begin{cases} -3\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} = 0 \\ 3\alpha_{31} - 3\alpha_{32} + \alpha_{33} = 0 \\ 3\alpha_{31} + \alpha_{32} - 3\alpha_{33} = 0 \end{cases}$$

Отсюда $\alpha_{31} = \dfrac{2}{3}\alpha_{33},\quad \alpha_{32} = \alpha_{33}$. Если принять $\alpha_{33} = 3$, то получаем:

$$y_3 = 2e^{3x}; \quad z_3 = 3e^{3x}; \quad w_3 = 3e^{3x};$$

Общее решение имеет вид:

$$y = -C_2e^{-2x} + 2C_3e^{3x},\ z = -C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 3C_3e^{3x},\ w = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 3C_3e^{3x},$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. ■

Корни характеристического уравнения действительные, но среди них есть кратные. Если корень λ имеет кратность *r*, тогда этому корню соответствуют решения вида:

$$y_i = P_i(x)e^{\lambda x},\ i = 1, 2, ..., n$$

где $P_i(x)$ − полиномы степени не выше *r*.

Среди коэффициентов этих полиномов *r* коэффициентов являются произвольными, а остальные выражаются через них. Полагая один из этих произвольных коэффициентов равным единице, а остальные нулю, получаем *r* линейно независимых частных решений, соответствующих данному *r*-кратному корню λ характеристического уравнения.

Пример 16.11. Решить систему

$$\begin{cases} x'_t = 2x + y \\ y'_t = 4y - x \end{cases}$$

◀Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Откуда $\lambda_{1,2} = 3$, т.е корень двукратный.

Пусть $x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$ и $y = (C_3 + C_4 t)e^{3t}$. Выразим постоянные C_3 и C_4 через C_1 и C_2. Для этого подставим найденные решения в одно из уравнений системы и приравняем коэффициенты при e^{3t} и te^{3t}. Имеем

$$(3C_1 + C_2 + t3C_2)e^{3t} = (2C_1 + C_3)e^{3t} + (2C_2 + C_4)te^{3t}$$

Отсюда

$$C_3 = C_1 + C_2,\ C_4 = C_2.$$

Итак, получено общее решение системы

$$x = (C_1 + tC_2)e^{3t},\ y = (C_1 + C_2 + tC_2)e^{3t},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. ■

Пример 16.12. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 3x + y - z \\ z' = x + z \end{cases}$$

◀Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$. Это уравнение имеет единственный действительный корень кратности три $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Положим

$$\begin{cases} x = e^{2t}\left(a_1t^2 + a_2t + a_3\right) \\ y = e^{2t}\left(b_1t^2 + b_2t + b_3\right) \\ z = e^{2t}\left(c_1t^2 + c_2t + c_3\right) \end{cases}$$

Продифференцировав, получим:

$$\begin{cases} x' = e^{2t}\left(a_1t^2 + \left(2a_1 + 2a_2\right)t + \left(a_2 + 2a_3\right)\right) \\ y' = e^{t}\left(b_1t^2 + \left(2b_1 + 2b_2\right)t + \left(b_2 + 2b_3\right)\right) \\ z' = e^{t}\left(c_1t^2 + \left(2c_1 + 2c_2\right)t + \left(c_2 + 2c_3\right)\right) \end{cases}$$

Значения x, y, z, x', y', z' подставим в исходную систему и разделим на e^{2t}:

$$\begin{cases} 2a_1t^2 + \left(2a_1 + 2a_2\right)t + \left(a_2 + 2a_3\right) = 4a_1t^2 + 4a_2t + 4a_3 - b_1t^2 - b_2t - b_3 \\ 2b_1t^2 + \left(2b_1 + 2b_2\right)t + \left(b_2 + 2b_3\right) = 3a_1t^2 + 3a_2t + 3a_3 + b_1t^2 + b_2t + b_3 - c_1t^2 - c_2t - c_3 \\ 2c_1t^2 + \left(2c_1 + 2c_2\right)t + \left(c_2 + 2c_3\right) = a_1t^2 + a_2t + a_3 + c_1t^2 + c_2t + c_3 \end{cases}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t:

$$\begin{cases}2a_1 = 4a_1 - b_1\\ 2b_1 = 3a_1 + b_1 - c_1\\ 2c_1 = a_1 + c_1\end{cases}, \qquad \begin{cases}b_1 = 2a_1\\ c_1 = a_1\\ a_1 = C_1\end{cases}, \quad \begin{cases}b_1 = 2C_1\\ c_1 = C_1\\ a_1 = C_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a_1 + 2a_2 = 4a_2 - b_2\\ 2b_1 + 2b_2 = 3a_2 + b_2 - c_2\\ 2c_1 + 2c_2 = a_2 + c_2\end{cases}, \qquad \begin{cases}2a_2 - b_2 = 2C_1\\ 3a_2 - b_2 - c_2 = 4C_1\\ a_2 - c_2 = 2C_1\end{cases}, \qquad \begin{cases}a_2 = C_2\\ b_2 = 2C_2 - 2C_1\\ c_2 = 2C_2 - 2C_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_2 + 2a_3 = 4a_3 - b_3\\ b_2 + 2b_3 = 3a_3 + b_3 - c_3\\ c_2 + 2c_3 = a_3 + b_3 + c_3\end{cases}, \begin{cases}a_2 = 2a_3 - b_3\\ b_2 = 3a_3 - b_3 - c_3\\ c_2 = a_3 + b_3 - c_3\end{cases}, \begin{cases}a_3 = C_3\\ b_3 = 2C_3 - C_2\\ c_3 = 2C_1 + 2C_3 - 3C_2\end{cases}$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases}x = e^{2t}\left(C_1t^2 + C_2t + C_3\right)\\ y = e^{2t}\left(2C_1t^2 + 2\left(C_2 - C_1\right)t + \left(2C_3 - C_2\right)\right)\\ z = e^{2t}\left(C_1t^2 + 2\left(C_2 - C_1\right)t + \left(2C_1 - 3C_2 + 2C_3\right)\right)\end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. ■

Корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные. Пусть среди корней характеристического уравнения имеется два комплексных сопряженных корня: $\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta.$

Этим корням будут соответствовать решения

$$y_j^{(1)} = \alpha_{1j}e^{(\alpha+i\beta)x} \text{ и } y_j^{(2)} = \alpha_{2j}e^{(\alpha-i\beta)x},\ (j = 1,2,...,n).$$

Коэффициенты α_{1j} и α_{2j} определяются из системы уравнений.

Действительные и мнимые части комплексного решения тоже являются решениями. Таким образом, мы получаем два частных решения:

$$\overline{y}_j^{(1)} = e^{\alpha x}(\lambda_j^{(1)}\cos\beta x + \lambda_j^{(2)}\sin\beta x),$$
$$\overline{y}_j^{(2)} = e^{\alpha x}(\overline{\lambda}_j^{(1)}\cos\beta x + \overline{\lambda}_j^{(2)}\sin\beta x),$$

где $\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}, \overline{\lambda}_j^{(1)}, \overline{\lambda}_j^{(2)}$ – действительные числа, определяемые через α_{1j} и α_{2j}.

Соответствующие комбинации функций войдут в общее решение системы.

Пример 16.13. Решить систему:

$$\begin{cases} x_t' = -7x + y \\ y_t' = -2x - 5y \end{cases}.$$

◀Характеристическим уравнением этой системы будет

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0.$$

Откуда $\lambda_{1,2} = -6 \pm i$, т.е корни являются комплексно-сопряженными. Подставляя найденные корни в систему, получим

$$\begin{cases} (-7+6-i)\alpha_{11} + \alpha_{12} = 0 \\ -2\alpha_{11} + (-5+6-i)\alpha_{12} = 0 \end{cases}.$$

Определитель этой системы равен нулю и одно из уравнений является следствием другого. Полагая $\alpha_{11} = 1$, из первого уравнения получим: $\alpha_{12} = 1+i$. Аналогично можно найти: $\alpha_{21} = 1$, $\alpha_{22} = 1-i$. Первому корню соответствует решение

$$(x, y) = \left(e^{(-6+i)t}, (1+i)e^{(-6+i)t}\right),$$

второму корню – решение

$$(x, y) = \left(e^{(-6-i)t}, (1-i)e^{(-6-i)t}\right),$$

комплексно сопряженное с первым.

За систему частных решений можно взять отдельно действительные или мнимые части. Общее решение имеет вид:

$$(x, y) = \left(e^{-6t}\left(C_1\cos t + C_2\sin t\right), e^{-6t}\left(C_1\left(\cos t - \sin t\right) + C_2\left(\cos t + \sin t\right)\right)\right),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. ■

Среди корней характеристического уравнения есть комплексные кратные. Решение проводится по схеме, для кратных действительных корней. Каждый раз после получения комплексного решения проводится выделение действительной и мнимой частей.

16.4. Структура общего решения неоднородной линейной системы

Пусть $y_0(t)$ – частное решение неоднородной системы уравнений

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + g_i(t), \quad i = 1, 2, ..., n$$

а $y_1(t), ..., y_n(t)$ – фундаментальная система решений однородной системы уравнений

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Тогда формула

$$y(t) = y_0(t) + C_1 y_1(t) + ... + C_n y_n(t),$$

где $C_1, ..., C_n$ – произвольные постоянные, дает общее решение неоднородной системы уравнений.

Теорема 16.4. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *вектор* $g(t)$ *непрерывен, и пусть известна фундаментальная система решений для однородной системы уравнений. Тогда общее решение неоднородной системы уравнений находится с помощью квадратур.*

Доказательство. Пусть $y_1(t), ..., y_n(t)$ – фундаментальная система решений для однородной системы, тогда

$$y_i' = \boldsymbol{A} y_i \ (i = 1, ..., n)$$

или в матричной форме

$$\boldsymbol{Y}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t),$$

где

$$
\boldsymbol{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}
$$

матрица, называемая фундаментальной матрицей системы уравнений. Определитель $|\boldsymbol{Y}(t)|$ фундаментальной матрицы есть определитель Вронского и поэтому отличен от нуля $|\boldsymbol{Y}(t)| \neq 0$ на отрезке $[a,b]$.

Будем искать решение неоднородной системы уравнений в виде

$$
y(t) = c_1(t)y_1(t) + \ldots + c_n(t)y_n(t) = Y(t)C(t),
$$

где $C(t) = \{C_1(t),\ldots C_n(t)\}$.

Подставляя выражение в систему, получим

$$
\boldsymbol{Y}'(t)C(t) + \boldsymbol{Y}(t)C'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t)C(t) + g(t).
$$

Поскольку $\boldsymbol{Y}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t)$, последнее уравнение примет вид

$$
\boldsymbol{Y}(t)C'(t) = g(t)
$$

Так как $|\boldsymbol{Y}(t)| \neq 0$ и матрица $\boldsymbol{Y}(t)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует непрерывная на $[a,b]$ обратная матрица $\boldsymbol{Y}^{-1}(t)$.

Умножая обе части уравнения (20) слева на $\boldsymbol{Y}^{-1}(t)$, получим

$$
C'(t) = \boldsymbol{Y}^{-1}(t)g(t),
$$

откуда

$$
C(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{Y}^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau + C_0,
$$

где $C_0 = \{C_{10},\ldots C_{n0}\}$ – произвольный постоянный вектор. Подставляя найденное выражение для $C(t)$ в представление решения, получим

$$
y(t) = \boldsymbol{Y}(t)C_0 + \boldsymbol{Y}(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{Y}^{-1}(t)(\tau)g(\tau)d\tau
$$

Полученное выражение дает общее решение неоднородной системы уравнений. Решение задачи Коши для этой системы задается формулой

$$y(t) = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{Y}^{-1}(t_0)x_0 + \boldsymbol{Y}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{Y}^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau .$$

Метод нахождения решения системы называется *методом вариации постоянных* или *методом неопределенных коэффициентов Лагранжа*.

Практически удобно поступать следующим образом: Уравнение $\boldsymbol{Y}(t)C'(t) = g(t)$ в развернутом виде представляет собой систему линейных уравнений относительно $C_i'(t)$:

$$\begin{array}{l} y_{11}(t)C_1'(t) + ... + y_{1n}(t)C_n'(t) = g_1(t) \\ y_{21}(t)C_1'(t) + ... + y_{2n}(t)C_n'(t) = g_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n1}(t)C_1'(t) + ... + y_{nn}(t)C_n'(t) = g_n(t) \end{array},$$

Решая эту систему относительно $C_i'(t)$ $(i = 1,...,n)$, получим $C_i'(t) = \phi_i(t)$ или

$$C_i(t) = \int_{t_0}^{t}\phi_i(\tau)d\tau + C_{i0} .$$

Подставляя найденные выражения для $C_i(t)$ в равенство

$$y(t) = y_0(t) + C_1 y_1(t) + ... + C_n y_n(t)$$

получим общее решение для системы.

Пример 16.14. Решить систему методом вариации

$$\begin{cases} x_t' = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ y_t' = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1} \end{cases}$$

Решим, прежде всего однородную систему, соответствующую данной системе

$$\begin{cases} x_t' = -4x - 2y \\ y_t' = 6x + 3y \end{cases}$$

Найдем из первого уравнения этой системы $y=-2x-\frac{1}{2}x'_t$ и подставим во второе уравнение. Получим $x''_t+x'_t=0$. Откуда $x=C_1+C_2e^{-t}$. Тогда $y=-2C_1-\frac{3}{2}C_2e^{-t}$. Для определения общего решения неопределенной системы, согласно методу вариации произвольных постоянных, считаем C_1 и C_2 некоторыми дифференцируемыми функциями переменной t. Найдем из системы уравнений, которая получается в результате подстановки найденных значений x и y в исходную неоднородную систему. Таким образом, имеем

$$C'_1+C'_2e^{-t}=\frac{2}{e^t-1},\ -2C'_1-\frac{3}{2}C'_2=-\frac{3}{e^t-1}.$$

Отсюда находим $C'_2=\frac{2e^t}{e^t-1}$, $C'_1=0$. Интегрируя последние уравнения, получаем

$$C_1=C_{10},\ C_2=2\ln\left|e^t-1\right|+C_{20},$$

где C_{10},C_{20} – произвольные постоянные. Теперь подставляем найденные значения C_1 и C_2 в общее решение однородной системы. Тогда имеем общее решение неоднородной системы

$$x=C_1+C_2e^{-t}+2e^{-t}\ln\left|e^t-1\right|,$$

$$y=-2C_1-\frac{3}{2}C_2e^{-t}-3e^{-t}\ln\left|e^t-1\right|,$$

где C_1,C_2 – произвольные постоянные. ■

Пример 16.15. Решить систему методом вариации

$$\begin{cases} x'_t=x-y-\dfrac{1}{\cos t} \\ y'_t=2x-y \end{cases}$$

Решим, прежде всего однородную систему, соответствующую данной системе

$$\begin{cases} x_t' = x - y \\ y_t' = 2x - y \end{cases}$$

Эта система имеет общее решение, которое можно легко найти, например, методом исключения

$$x = C_1 \sin t + C_2 \cos t\,,\ \ y = (C_1 + C_2)\sin t + (C_1 - C_2)\cos t\,.$$

Считая в согласии с методом вариации произвольных постоянных, что C_1 и C_2 некоторые дифференцируемые функции переменной t, подставим найденные значения x и y в исходную неоднородную систему. Таким образом, имеем

$$C_1' \cos t - C_2' \sin t = \frac{1}{\cos t}\,,\ \ C_1' \sin t + C_2' \cos t = \frac{1}{\cos t}\,.$$

Откуда находим

$$C_2' = 1 - \mathrm{tg} t\,,\ \ C_1' = 1 + \mathrm{tg} t\,.$$

Интегрируя эти уравнения, имеем

$$C_1 = t - \ln\left|\cos t\right| + C_{10}\,,\ \ C_2 = t + \ln\left|\cos t\right| + C_{20}\,,$$

где C_{10}, C_{20} – произвольные постоянные. Теперь подставляем найденные значения C_1 и C_2 в общее решение однородной системы. Тогда имеем общее решение неоднородной системы

$$x = t(\sin t + \cos t) + (\cos t - \sin t)\ln\left|\cos t\right| + C_1 \sin t + C_2 \cos t\,,$$

$$y = 2t \sin t + 2\cos t + \ln\left|\cos t\right| + (C_1 + C_2)\sin t + (C_2 - C_1)\cos t\,,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. ■

Однако, если можно найти какое-либо частное решение неоднородной системы, то удобнее бывает воспользоваться тем, что для неоднородной системы общим решением, так же как для неоднородного уравнения, будет сумма общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Пример 16.16. Решить систему

$$\begin{cases} x_t' = 3x + 2y + 4e^{5x} \\ y_t' = x + 2y \end{cases}$$

◀Найдем частное решение в виде: $x = Ae^{5t}$, $y = Be^{5t}$. При подстановке получим

$$\begin{cases} 5A = 3A + 2B + 4 \\ 5B = A + 2B \end{cases}$$

Отсюда $A = 3$, $B = 1$. Прибавив к полученному частному решению общее решение соответствующей однородной системы, запишем общее решение исходной системы: $x = C_1e^t + 2C_2e^{4t} + 3e^{5t}$, $y = C_1e^t + C_2e^{4t} + e^{5t}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные. ■

Пример 16.17. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} y_x' = y + z \\ z_x' = y + z + x \end{cases}$$

◀Эта система дифференциальных уравнений является неоднородной (в уравнение входит независимая переменная x).

Для решения продифференцируем первое уравнение по x. Получаем:

$$y'' = y' + z'.$$

Заменяя значение z' из второго уравнения, получаем:

$$y'' = y' + y + z + x.$$

С учетом первого уравнения, получаем:

$$y'' = 2y' + x.$$

Решаем полученное дифференциальное уравнение второго порядка.

$$y'' - 2y' = x.$$

Решим сначала соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - 2y' = 0,$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, имеет корни $\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = 2$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Теперь находим частное решение неоднородного дифференциального уравнения по формуле

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x), \ \alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax + B.$$

Тогда $y = Ax^2 + Bx$, $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$.

Имеем: $2A - 4Ax - 2B = x$, $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Тогда частное решение уравнения имеет вид: $y = -\frac{1}{4}\left(x^2 + x\right)$. Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1).$$

Подставив полученное значение в первое уравнение системы, получаем

$$z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. ■

Задачи для самостоятельного решения

Найти решение системы дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} \dot{x} = x - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 1 + z \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = 2y - z \\ \dot{z} = z \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = y + t \\ \dot{y} = x - t \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} \dot{x} + 3x + 4y = 0 \\ \dot{y} + 2x + 5y = 0 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} \dot{x} = -y + z \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -x + z \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = x + y \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} \ddot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = x + y - z \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} \dot{x} = y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = x + z \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y + 2z \\ \dot{y} = -5x + 7y - 5z \\ \dot{z} = -6x + 6y - 4z \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} \dot{x} = e^{t} - y \\ \dot{y} = e^{-t} + x \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} \dot{x} = y + t \\ \dot{y} = x + e^{t} \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \cos t \\ \dot{y} = -x + 2\sin t \end{cases}$