2.1. Вычислить определитель матрицы

Вычислить определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

<u>1 способ: Через миноры</u>

Вычитаем из третьей строки четвёртую, складываем первую с четвёртой, умноженной на 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

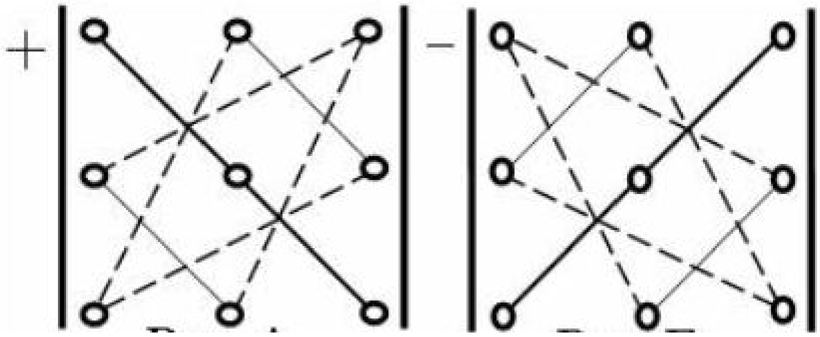
Раскладываем по 4 столбцу

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 \\ 5 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Снова получим нули, а затем вычислим определитель матрицы 2 на 2

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 \\ 5 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 12 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 12 & 11 \end{vmatrix} =$$
$$-(-8 \cdot 11 - 1 \cdot 12) = 88 + 12 = 100.$$

<u>2 способ: Метод треугольников</u>



2.2. Решить матричное уравнение

AX=B, X=A^{-1}B (или XA=B, X=BA^{-1})

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -17 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица - произведение единицы, поделенной на определитель матрицы, и матрицы алгебраических дополнений

$$\frac{1}{detA}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Способ нахождения матрицы алгебраических дополнений для матрицы 2 на 2:
Элементы главной диагонали меняем местами, у элементов побочной диагонали меняем знак

Найдем определитель матрицы А

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 - 3 \cdot (-4) = 10.$$

Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Проверка обратной матрицы:
Перемножаем начальную и получившуюся обратную матрицу, если получаем единичную матрицу, то обратная матрица найдена правильно

Находим X, перемножаем найденную обратную матрицу и матрицу B

$$X = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -17 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 50 & 10 & 0 \\ 30 & 20 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Проверка результата:

$$\text{Проверка: } X \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -20 \\ 5 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} = B - \text{верно.}$$

2.3. Решение СЛУ

Проверка совместности системы:

СЛУ совместна, если ранги основной расширенной матрицы равны

Метод Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 12 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 14 \end{cases}.$$

Составляем матрицу из множителей неизвестных и находим её определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-5) + (-2)\cdot 2\cdot 2 + (-4)\cdot 3\cdot 3 -$$

$$(-4)\cdot(-1)\cdot(-2) - (-5)\cdot 2\cdot 3 - (-1)\cdot 3\cdot 2 = -5 - 8 - 36 + 8 + 30 + 6 = -5$$

Составим определитель для первого неизвестного, заменив первый столбец определителя на правую часть СЛУ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 14 & 3 & -5 \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = -10$$

Аналогично для оставшихся неизвестных

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 12 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 14 & -5 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = -5$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 12 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 14 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = 15$$

Найдём значения неизвестных

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

$$x_1 = \frac{-10}{-5} = 2;\ x_2 = \frac{-5}{-5} = 1;\ x_3 = \frac{15}{-5} = -3.$$

Метод обратной матрицы:
Запишем СЛУ в матричной форме AX=B, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Считаем алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

Аналогично остальные
Делаем проверку обратной матрицы

Находим X

$$X = A^{-1} \cdot B; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 11 & -3 & -10 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Делаем проверку результата

2.4. Решить неоднородную СЛУ методом Гаусса

Выделить общее решение однородной СЛУ и частное решение неоднородной СЛУ

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 1 \end{cases}$$

m - число уравнений (m=3); n - число неизвестных (n=4);

Запишем СЛУ в матричном виде

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}; X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix};$$

Выпишем расширенную матрицу и приведем к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & -2 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -24 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \end{array}\right):3 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг расширенной матрицы Rg $(A|B) = 2$ - числу ненулевых строк.

Rg $(A|B) < n$ (числа неизвестных) $\Rightarrow$. система имеет бесконечно много решений.

Выберем базисный минор- минор 2-го порядка (т.к. ранг Rg $(A|B) = 2$) , не равный нулю. Пусть это будет минор , состоящий из элементов приведенной к ступенчатому виду матрицы, стоящих в 1 и 2 строке и 1 и 3 столбце.

$M_б = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$; Таким образом, базисные строки – 1-я и 2-я, базисные столбцы- 1-й и 3-й. Базисным столбцам соответствуют базисные переменные: x_1 и x_3 - базисные переменные, x_2 и x_4 - свободные переменные

Присвоим свободным переменным значения констант

$$x_2 = C_1\ ;\ \ x_4 = C_2.$$

$$\text{Перепишем систему:}\ \begin{cases} 3x_1 - C_1 + 3x_3 + 14C_2 = -8 \\ \qquad\qquad -x_3 \ - 8C_2 \ = \ 7 \end{cases}$$

Запишем общее неоднородное решение

$$X_{\text{он}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}C_1 + \frac{10}{3}C_2 + \frac{13}{3} \\ C_1 \\ -8C_2 - 7 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Из этого следует

$$X_{\text{оо}} = C_1\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X_{\text{ч}} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Проверка:</u>

AX=0

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

AX=B

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

2.5. Работа с векторами

Даны векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$: $\overline{a} = \overline{i}$-$2\overline{j}+4\overline{k}$; $\overline{b} = 3\overline{i}$-$6\overline{j}+12\overline{k}$; $\overline{c} = -2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$

1) Среди векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ выделить пары коллинеарных векторов, ортогональных векторов.

Условие коллинеарности:
Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \iff \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

Координаты векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ в ортонормированном базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$:

$\overline{a} = (1,\text{-}2,4)$, $\overline{b} = (3,-6,12)$, $\overline{c} = (-2,1,1)$. Как мы видим, соответствующие координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ пропорциональны : $\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{4}{12} \Rightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$; координаты векторов $\overline{a}, \overline{c}$ непропорциональны: $\frac{1}{-2} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{4}{1} \Rightarrow \overline{a}$ не коллинеарен $\overline{c}$ $(\overline{a} \nparallel \overline{c})$ и, следовательно, $\overline{b}$ не коллинеарен $\overline{c}$ $(\overline{b} \nparallel \overline{c})$, т.к. $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Условие ортогональности:
Вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е. тогда и только тогда, когда сумма произведений их соответствующих координат равна нулю.

$$x_a x_c + y_a y_c + z_a z_c = 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 1+4\cdot 1=0 \Rightarrow \overline{a} \text{ ортогонален } \overline{c} \quad (\overline{a} \perp \overline{c})$$

Ортогональность $\overline{b}$ и $\overline{c}$ сразу следует из того, $\overline{a} \perp \overline{c}$ и $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

2) Проверить будут ли компланарны три вектора:

Условие компланарности:
Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.
Примечание:
Если тройка векторов содержит пару коллинеарных векторов, то они компланарны.

a) Вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны, т.к. $\overline{a} \parallel \overline{b}$ (см. п.1).

Критерий компланарности также выполняется.

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$, т.к. две строки определителя пропорциональны.

b) $\overline{l} = 2\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$; $\overline{m} = 2\overline{i}$-$\overline{j}+3\overline{k}$; $\overline{n} = \overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$

Найдем смешанное произведение векторов $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$.

$$(\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{-}2+3+6+3\text{-}2\text{-}6=2$$

$(\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}) \neq 0 \Rightarrow$ вектора $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$ - не компланарны.

2.6. Вектора. Базис

<u>Задача 2. 6</u>. Доказать, что векторы $\vec{a}, \overrightarrow{b}, \vec{c}$ образуют базис в пространстве V_3. Найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

$\vec{a} = (1,2,1)$; $\vec{b} = (0,-1,1)$; $\vec{c} = (2,0,1)$; $\vec{d} = (5,8,2)$.

$\dim V_3 = 3$, следовательно, любые три линейно независимые вектора в V_3 образуют базис.

Проверим на линейную независимость векторы $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$.

Составим определитель из координат векторов, записав их по столбцам.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = -1+0+4+2-0-0=5$\neq$ 0 => $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$- линейно независимые, => они образуют базис => вектор $\vec{d}$ можно разложить по этому базису, т.е. существуют числа x,y,z, такие что:

$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Запишем в координатах:

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\8\\2\end{pmatrix},\ \text{получаем систему:} \begin{cases} x \quad + 2z = 5 \\ 2x - y \quad = 8 \\ x + y + z = 2 \end{cases};$$

Данную систему можно решить любым способом, например, методом Крамера

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3;\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{5} = -2;\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1;$$

$$\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}.$$

<u>Проверка результата:</u>

$$\text{Проверка: } 3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\8\\2\end{pmatrix}, \text{ верно!}$$

2.7. Скалярное, векторное и смешанное произведения. Угол, прямая, площадь и объём

Задача 2.7 Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти:

1) внутренний угол при вершине A треугольника ABC;
2) площадь треугольника ABC;
3) объём пирамиды $ABCD$;
4) длину высоты, опущенную из вершины D, пирамиды $ABCD$.

$A(2;3;1),\quad B(4;1;-2),\quad C(6;3;7),\quad D(-5;-4;8).$

1). Внутренний угол A треугольника ABC: $\angle BAC$ – это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найдём косинус угла $\angle BAC$ с помощью скалярного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Примечание:
Косинус угла можно найти из скалярного произведения векторов
Скалярное произведение:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Найдем координаты векторов

$\overrightarrow{AB} = (2;-2;-3)$; $\overrightarrow{AC} = (4;0;6)$

Найдём скалярное произведение и длины векторов:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 2\cdot 4 + (-2)\cdot 0 + (-3)\cdot 6 = -10$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{-10}{\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{13}} = \frac{-5}{\sqrt{221}} = \frac{-5\cdot\sqrt{221}}{221} \Rightarrow$$

$$\angle BAC = \arccos\left(-\frac{5\cdot\sqrt{221}}{221}\right).$$

2). Площадь треугольника ABC вычислим с помощью векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

Формула площади треугольника через векторное произведение векторов:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

Формула векторного произведения:

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-12-0) - \vec{j}(12-(-12)) + \vec{k}(0-(-8)) == -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$= (-12;-24;8).$$

$$\left|[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]\right| = \sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2} = 28.$$

Итак, площадь треугольника равна $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 28 = 14.$

3). Объём пирамиды $ABCD$ вычислим с помощью смешанного произведения трёх векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $V_{\text{пир } ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$

<u>Формула объема пирамиды через смешанное произведение:</u>

$$V_{\text{пир } ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$$

<u>Формула смешанного произведения:</u>

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = (-7;-7;7)$$

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308.$$

<u>Примечание:</u>
Если смешанное произведение >0, то тройка векторов правая,
если =0, то вектора компланарны,
если <0, то тройка векторов левая.

$$V_{\text{пир } ABCD} = \frac{1}{6}\cdot 308 = \frac{154}{3}.$$

4). Длина высоты из вершины D пирамиды $ABCD$.

$$V_{\text{пир}ABCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h_D \qquad h_D = \frac{3V_{\text{пир}ABCD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|}{\left|[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]\right|}$$

Воспользуемся результатами пунктов 2) и 3). Тогда $h_D = \frac{14\cdot 22}{28} = 11.$

2.8. Свойства векторного и скалярного произведений

Задача 2.8 Пользуясь свойствами скалярного и векторного произведений, вычислить угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах. Угол между векторами $\bar{p}$ и $\bar{q}$ равен α.

Вариант	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\lvert\bar{p}\rvert$	$\lvert\bar{q}\rvert$	α
	$\bar{p}-2\bar{q}$	$\bar{p}+\bar{q}$	3	2	2π/3

Свойства скалярного произведения:

1. $(\bar{p},\bar{q}) = (\bar{q},\bar{p})$;
2. $(\bar{p},\bar{p}) = |\bar{p}|^2$;

Свойства векторного произведения:

1. $[\bar{p},\bar{p}] = 0$; 2. $[\bar{p},\bar{q}] = -[\bar{q},\bar{p}]$;

а) Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ найдем с помощью скалярного произведения $\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$, используя свойства скалярного произведения:

$$(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{p}-2\bar{q})\cdot(\bar{p}+\bar{q}) = (\bar{p},\bar{p}) + (\bar{p},\bar{q}) - 2(\bar{q},\bar{p}) - 2(\bar{q},\bar{q}) =$$

$$= |\bar{p}|^2 - |\bar{p}|\cdot|\bar{q}|\cdot cos(\bar{p},\bar{q}) - 2|\bar{q}|^2 = 3^2 - 3\cdot 2\cdot\cos\frac{2\pi}{3} - 2\cdot 2^2$$

$$= 9 + 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} - 8 = 4$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})} = \sqrt{(\bar{p}-2\bar{q})\cdot(\bar{p}-2\bar{q})} = \sqrt{\bar{p}^2 - 2\bar{p}\cdot 2\bar{q} + 4\bar{q}^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 - 4\cdot 3\cdot 2\cdot\cos\frac{2\pi}{3} + 4\cdot 2^2} = \sqrt{9 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 16} = \sqrt{37}$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{(\bar{b},\bar{b})} = \sqrt{(\bar{p}+\bar{q})\cdot(\bar{p}+\bar{q})} = \sqrt{\bar{p}^2 + 2\bar{p}\cdot\bar{q} + \bar{q}^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 + 2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos\frac{2\pi}{3} + 2^2} = \sqrt{9 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 4} = \sqrt{7}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{4}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{259}}{259} \Rightarrow (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \arccos\frac{4\sqrt{259}}{259} \approx 76°.$$

б) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю векторного произведения этих векторов

Формула площади параллелограмма через векторное произведение:

$$S = \left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|$$

$[\bar{a},\bar{b}] = [(\bar{p}-2\bar{q}),(\bar{p}+\bar{q})] = [\bar{p},\bar{p}] + [\bar{p},\bar{q}] - 2[\bar{q},\bar{p}] - 2[\bar{q},\bar{q}] = [\bar{p},\bar{q}] + 2[\bar{p},\bar{q}] = 3[\bar{p},\bar{q}] \Rightarrow [\bar{a},\bar{b}] = 3[\bar{p},\bar{q}]$;

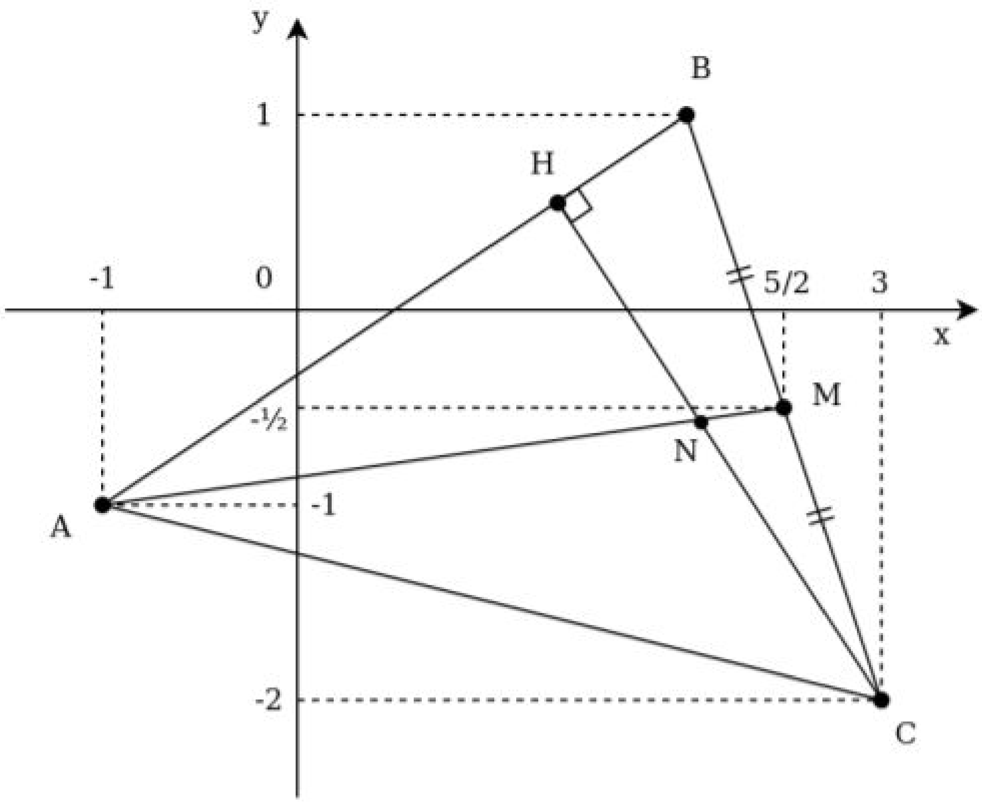
$|[\bar{p},\bar{q}]| = |\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\sin(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = 3\cdot 2\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = 3\sqrt{3}.$

Итак, площадь параллелограмма

$$S = \left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = 3|[\bar{p},\bar{q}]| = 3\cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$

2.9. Координаты. Треугольник

Даны вершины треугольника $A(-1;-1)$, $B(2;1)$, $C(3;-2)$ на плоскости.
Найти:
1) каноническое уравнение прямой AB;
2) уравнение высоты CH (общее и с угловым коэффициентом);
3) параметрические уравнения медианы AM;
4) координаты точки N пересечения медианы AM и высоты CH;
5) длину высоты CH;
6) координаты точки K пересечения медиан треугольника ABC.



1) Каноническое уравнение прямой AB, проходящей через две данные точки находим по формуле: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)}=\frac{y-(-1)}{1-(-1)} \Leftrightarrow \frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{2}.$$

<u>Каноническое уравнение прямой:</u>

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

2) Для общего уравнения высоты CH к стороне AB необходимы координаты нормали к CH – это вектор $\overline{AB}$:

$\overline{n}=\overline{AB}=(B-A)=(3;2)$. Точка $\mathrm{T}(x,y)\in CH \Leftrightarrow \overline{\mathrm{CT}}\perp\overline{AB} \Leftrightarrow \left(\overline{\mathrm{CT}},\overline{AB}\right)=0$

Так как $\overline{\mathrm{CT}}=(x-3;y+2)$, то общее уравнение высоты CH найдем по формуле

$n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)=0$; $3(x-3)+2(y+2)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-5=0.$

<u>Общее уравнение прямой:</u>

$$n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)=0;$$

Чтобы получить уравнение с угловым коэффициентом, выразим y через x:

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}, \qquad \text{угловой коэффициент } k = -\frac{3}{2}.$$

3) Найдём координаты точки M - середины стороны BC :

$$M = \left(\frac{B+C}{2}\right) = \left(\frac{2+3}{2}; \frac{1-2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Направляющий вектор медианы AM :

$$\overline{AM} = (M - A) = \left(\frac{5}{2} - (-1); -\frac{1}{2} - (-1)\right) = \left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Для удобства возьмём в качестве направляющего вектора медианы

$\bar{l} = 2\overline{AM} = (7; 1)$. Начальная точка $A(-1; -1)$.

Параметрические уравнения медианы AM $\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + lt} \\ \boldsymbol{y = y_0 + mt} \end{cases}$; $\boldsymbol{t} \in (-\infty; +\infty)$

(AM): $\begin{cases} x = 7t - 1 \\ y = t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

4) Координаты точки N пересечения медианы AM и высоты CH.
Воспользуемся параметрическими уравнениями медианы AM, подставим $x = 7t - 1$ и $y = t - 1$ в общее уравнение высоты CH и найдём значение параметра t для точки пересечения N :

$$3(7t - 1) + 2(t - 1) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{23}$$

Подставим найденное значение t в параметрические уравнения AM

$$N: \begin{cases} x = 7 \cdot \dfrac{10}{23} - 1 \\ y = \dfrac{10}{23} - 1 \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{47}{23}; -\frac{13}{23}\right)$$

5) Для нахождения длины высоты CH необязательно находить основание высоты H. Очевидно, что длина высоты равна расстоянию от точки C до стороны AB. Воспользуемся формулой расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой L, заданной своим общим уравнением $L: Ax + By + C = 0$

$$\rho(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

<u>Формула расстояния от точки до прямой:</u>

$$\rho(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

<u>Формула расстояния от точки до плоскости:</u>

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

В пункте 1) мы получили каноническое уравнение прямой AB. Получим общее уравнение этой прямой:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x - 3y - 1 = 0$$

Тогда

$$|CH| = \rho(C, AB) = \frac{|2 \cdot 3 - 3(-2) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{11}{\sqrt{13}} = \frac{11\sqrt{13}}{13}.$$

6) Точка K пересечения медиан треугольника ABC.

1 способ: Известно, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.

Тогда $\overline{AK} = 2\overline{KM}$. Пусть $K(x, y) \Rightarrow \overline{AK} = (x+1; y+1)$,

$$\overline{KM} = (\frac{5}{2} - x; -\frac{1}{2} - y)$$

$$(x+1; y+1) = 2\left(\frac{5}{2} - x; -\frac{1}{2} - y\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 5 - 2x \\ y + 1 = -1 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow K(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3})$$

2 способ: Известно, что координаты точки пересечения медиан треугольника являются средним арифметическим соответствующих координат вершин треугольника. $K\left(\frac{-1+2+3}{3}; \frac{-1+1-2}{3}\right) = K(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3})$

2.10. Координаты. Пирамида

Для точек A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7), D(-5,-4,8) составить уравнения:

1) плоскости ABC;

2) канонические уравнения высоты, опущенной из вершины D пирамиды ABCD;

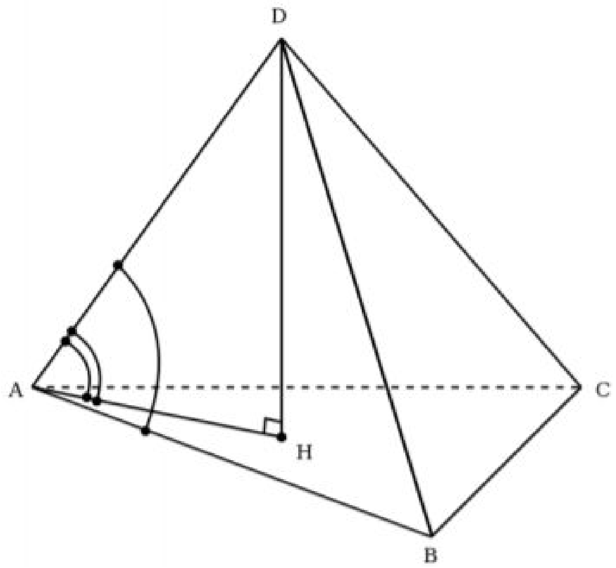
3) плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB.

Для точек A, B, C, D вычислить:

4) синус угла между прямой AD и плоскостью ABC;

5) косинус угла между плоскостью ABC и координатной плоскостью XOY;

6) косинус угла между прямыми AB и AD.



1) Уравнение плоскости ABC через три точки.

Найдём координаты векторов, компланарных этой плоскости (в данном случае – лежащих на плоскости):

$\overline{AB} = (B - A) = (2, -2, -3);$ $\quad \overline{AC} = (C - A) = (4,0,6)$

Произвольная точка $M \in (ABC) \Leftrightarrow$ векторы $\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}$ компланарны $\Leftrightarrow$ смешанное произведение этих векторов равно нулю, $\quad (\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0$

Найдём координаты произвольного вектора этой плоскости

$\overline{AM} = (x - 2, y - 3, z - 1)$

Тогда $\quad (\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

раскроем определитель по первой строке

$$\Leftrightarrow -12(x - 2) - 24(y - 3) + 8(z - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 6y - 2z - 22 = 0$$

Это общее уравнение плоскости ABC .

Нормаль плоскости $\bar{n} \perp (ABC)$: $\bar{n} = (3,6,-2)$.

2) Канонические уравнения высоты из вершины D.

Направляющим вектором высоты к грани ABC является нормаль к этой плоскости $\bar{n}$, начальная точка D. Тогда канонические уравнения высоты DH:

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-8}{-2}$$

3) Обозначим P – плоскость, проходящая через точку D, перпендикулярно прямой AB. Тогда нормалью к плоскости P является вектор $\overline{AB} = \overline{n} = (2,-2,-3)$. Общее уравнение плоскости P находим по формуле

$n_x \cdot (x - x_{0)} + n_y \cdot (y - y_{0)} + n_z \cdot (z - z_{0)} = 0$, получаем

$2(x+5) - 2(y+4) - 3(z-8) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - 3z + 26 = 0.$

4) $\sin\left(\widehat{AD, ABC}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overline{AD}, \overline{n}}\right)\right| = \left|\frac{(\overline{AD},\overline{n})}{|\overline{AD}||\overline{n}|}\right|$, где $\overline{n}$ - нормаль плоскости ABC

$$(\overline{AD}, \overline{n}) = (-7, \quad -7, \quad 7)\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -21 - 42 - 14 = -77$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + 7^2} = 7\sqrt{3}; \quad |\overline{n}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

$$\sin\left(\widehat{AD, ABC}\right) = \left|\frac{-77}{49\sqrt{3}}\right| = \frac{77\sqrt{3}}{147}$$

Мы взяли модуль, так как угол между прямой и плоскостью по определению острый, следовательно синус такого угла не может быть отрицательным.

5) $\cos\left(\widehat{ABC, XOY}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overline{n}, \overline{k}}\right)\right|$, где $\overline{n}$ - нормаль плоскости ABC, $\overline{k} = (0,0,1)$- базисный вектор, нормаль плоскости XOY.

$$(\overline{n}, \overline{k}) = (3 \quad 6 \quad -2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2; \qquad |\overline{n}| = 7, \qquad |\overline{k}| = 1$$

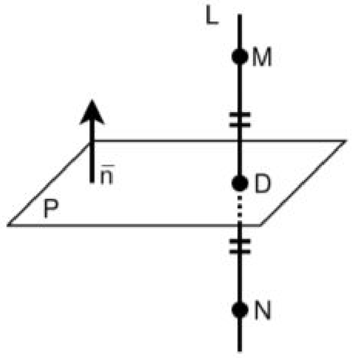
$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{ABC, XOY}\right) = \frac{|(\overline{n}, \overline{k})|}{|\overline{n}||\overline{k}|} = \frac{|-2|}{7} = \frac{2}{7}.$$

6) $\cos\left(\widehat{AB, AD}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overline{AB}, \overline{AD}}\right)\right| = \frac{|(\overline{AB},\overline{AD})|}{|\overline{AB}||\overline{AD}|} =$

$$= \frac{\left|(2 \quad -2 \quad -3)\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2}\sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + 7^2}} = \frac{|-14 + 14 - 21|}{\sqrt{17} \cdot 7\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{17}}.$$

2.11.1. Координаты. Точка и плоскость

Найти:
1) проекцию точки M(1,2,-3) на плоскость P: $3x - y - 2z + 7 = 0$;
2) расстояние от точки M до плоскости P;
3) точку N, симметричную точке M относительно плоскости P.



1) Точка D - проекция точки M на плоскость P, является точкой пересечения прямой L, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости P, и плоскости P. Найдем уравнение прямой L. Так как прямая L перпендикулярна заданной плоскости, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор нормали

к плоскости $\vec{s} = \vec{n} = (3, -1, -2)$

Запишем параметрическое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 - t, \\ z = -3 - 2t, \end{cases}$$

Подставим эти выражения в уравнение плоскости и найдем соответствующее значение параметра t: $\mathbf{3(1 + 3t) - (2 - t) - 2(-3 - 2t) + 7 = 0}$ => $\mathbf{t = -1}$

Подставив его в параметрическое уравнение прямой L,
получим координаты точки D:

$$x_D = 1 - 3, y_D = 2 - (-1), z_D = -3 - 2(-1), \text{ т. е. } D\ (-2, 3, -1).$$

2) Найдем расстояние от точки M(x_0, y_0, z_0) до плоскости P.
Формула расстояния от точки до плоскости:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Используя данную формулу, получим

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + 7|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

3) Найдем точку N ,симметричную точке M относительно плоскости.

Точка D является серединой отрезка MN. Следовательно,

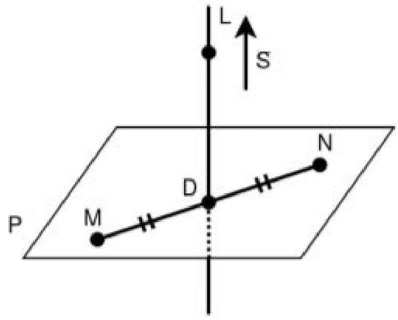
$x_D = \frac{x_M + x_N}{2}; y_D = \frac{y_M + y_N}{2}; z_D = \frac{z_M + z_N}{2}$, получаем $-2 = \frac{1 + x_N}{2}; 3 = \frac{2 + y_N}{2}; -1 = \frac{-3 + z_N}{2}$

отсюда $x_N = -5, y_N = 4, z_N = 1$, т.е. $N(-5,4,1)$.

2.11.2. Координаты. Точка и плоскость

Найти:

1) проекцию точки M(1,2,1) на прямую L : $\frac{x+3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$;
2) расстояние от точки M до прямой L;
3) точку N, симметричную точке M относительно прямой L.



1) Проекцией точки M на прямую L является точка D, полученная пересечением прямой L с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно прямой. Составим уравнение плоскости P, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L. Вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости совпадает с направляющим вектором $\vec{s}$ прямой L:

$\vec{n}=\vec{s}=(1,2,3)$. Запишем уравнение плоскости P:

$$1(x-1)+2(y-2)+3(z-1)=0 \text{ или } x+2y+3z-8=0$$

Запишем параметрическое уравнение прямой L: $\begin{cases} x=t-3, \\ y=2t, \quad t\in R. \\ z=3t-1, \end{cases}$

Подставим эти выражения в уравнение плоскости и найдем значение параметра t:
$\boldsymbol{t-3+2(2t)+3(3t-1)-8=0}$ => $\boldsymbol{t=1}$

Точка D имеет координаты D(-2,2,2).

2) Найдем расстояние от точки M до прямой L. Расстояние равно длине отрезка между точкой и ее проекцией на прямую.

$$|MD|=\sqrt{(x_D-x_M)^2+(y_D-y_M)^2+(z_D-z_M)^2}=\sqrt{(-2-1)^2+(2-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{9+0+1}=\sqrt{10}.$$

3) Найдем точку N, симметричную точке M относительно прямой L.

Точка D является серединой отрезка MN, следовательно

$$x_D=\frac{x_M+x_N}{2}, y_D=\frac{y_M+y_N}{2}, z_D=\frac{z_M+z_N}{2}\Rightarrow.$$

$$x_N=2(-2)-1=-5, y_N=2\cdot 2-2=2, z_N=2\cdot 2-1=3$$

Следовательно, N(-5,2,3) искомая точка.

2.12. Кривые второго порядка

Определение. Алгебраической кривой второго порядка называется кривая , уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

где не все коэффициенты A, B, C одновременно равны нулю.

2.12.1. Эллипс

Определение . Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

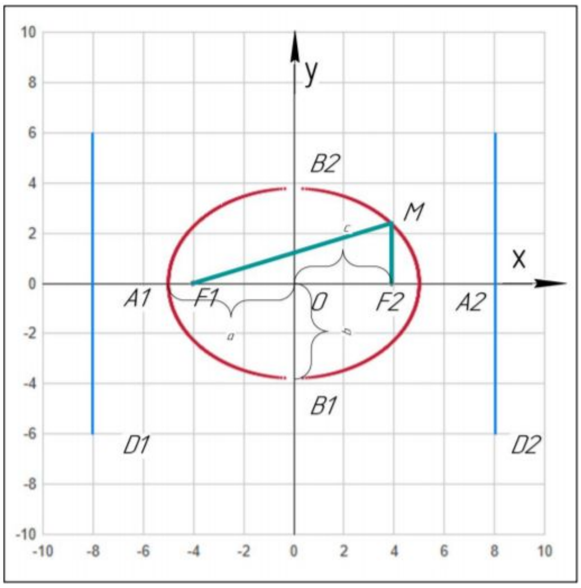
Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$$

В случае $a=b$ уравнение принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$, которое описывает окружность радиуса a с центром в начале координат.

Уравнение эллипса со смещенным центром:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



$F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ - фокусы

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$e = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет

$D_1 : x = -\frac{a}{e}$ и $D_2 : x = \frac{a}{e}$ - директрисы

$|F_1F_2| = 2c$

фокусы эллипса лежат на больших полуосях

2.12.2. Гипербола

***Определение*.** Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

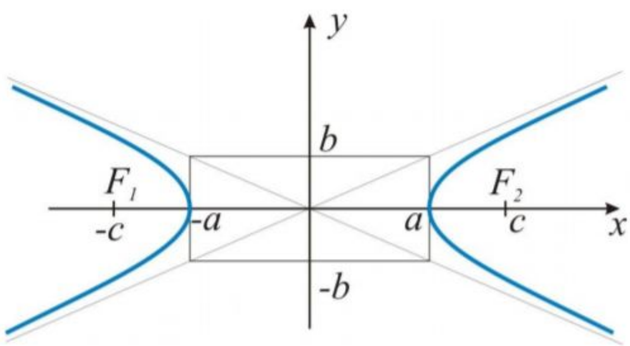
Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>0, b>0$$

Уравнение гиперболы со смещенным центром:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Чертёж гиперболы:



$y=\pm\frac{b}{a}x$ - асимптоты

$F_1(-c;0), F_2(c;0)$ - фокусы

$c=\sqrt{a^2+b^2}$

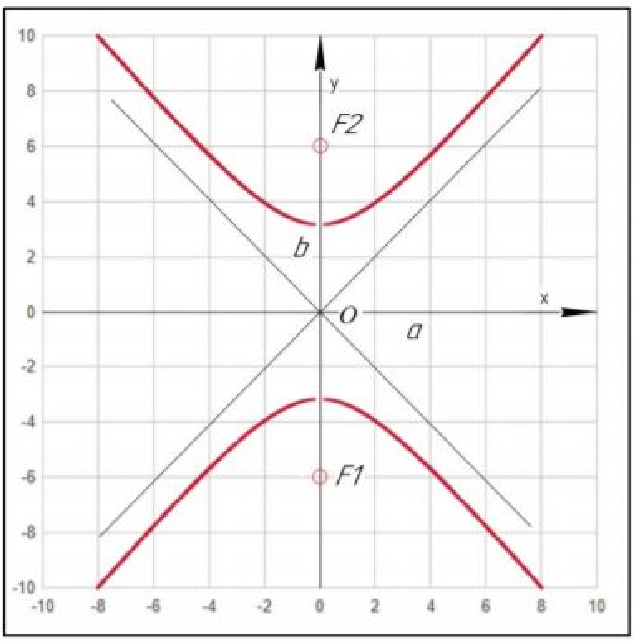
$e=\frac{c}{a}$ - эксцентриситет

$D_1: x=-\frac{a}{e}$ и $D_2: x=\frac{a}{e}$ - директрисы

Уравнение сопряженной гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

Чертеж сопряженной гиперболы:



$F_1(0;-c), F_2(0;c)$ - фокусы сопряженной гиперболы

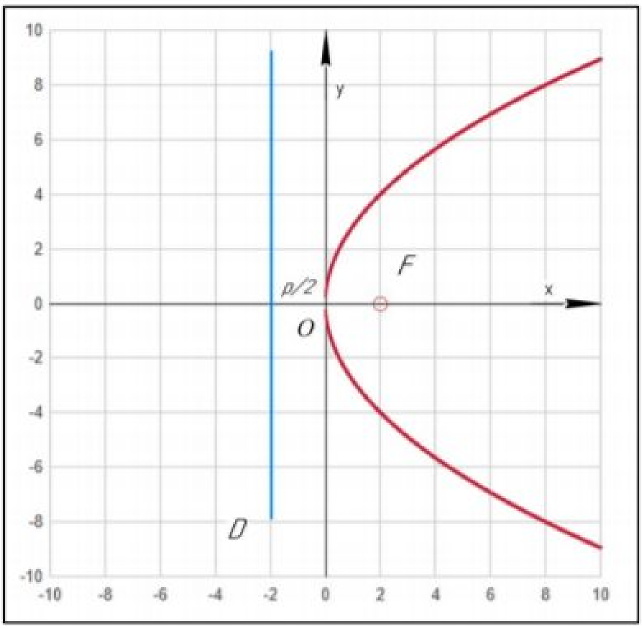
Остальное аналогично

2.12.3. Парабола

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до фиксированной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до фиксированной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы (ветви вправо):

$$y^2 = 2px, p > 0$$



Число **p** – расстояние от фокуса до директрисы, называется параметром параболы

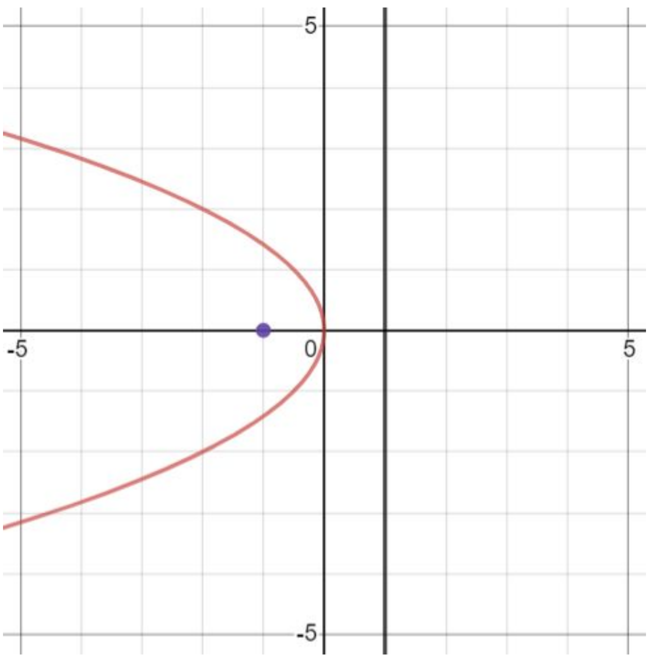
$$F\left(\frac{p}{2};0\right) \text{ — фокус}$$

$$D: x = -\frac{p}{2} \text{ — директриса.}$$

$$O\ (0;0) \text{ — её вершина}$$

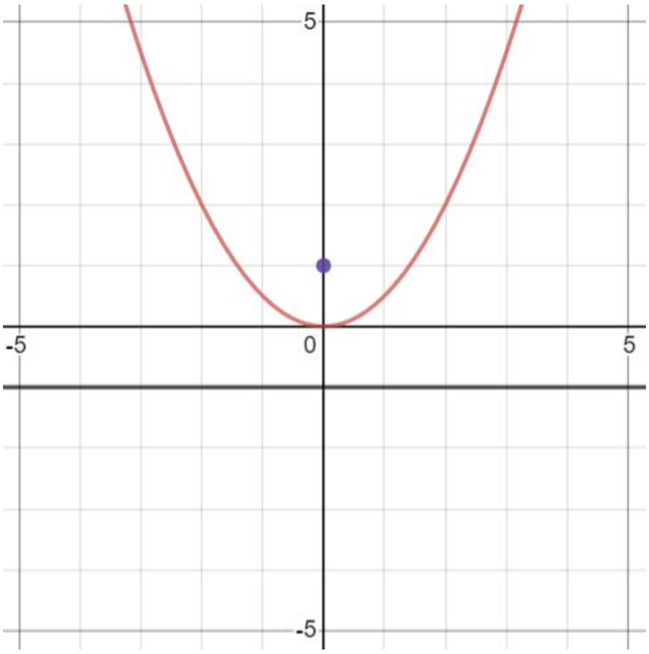
Уравнение параболы (ветви влево):

$$y^2 = -2px$$



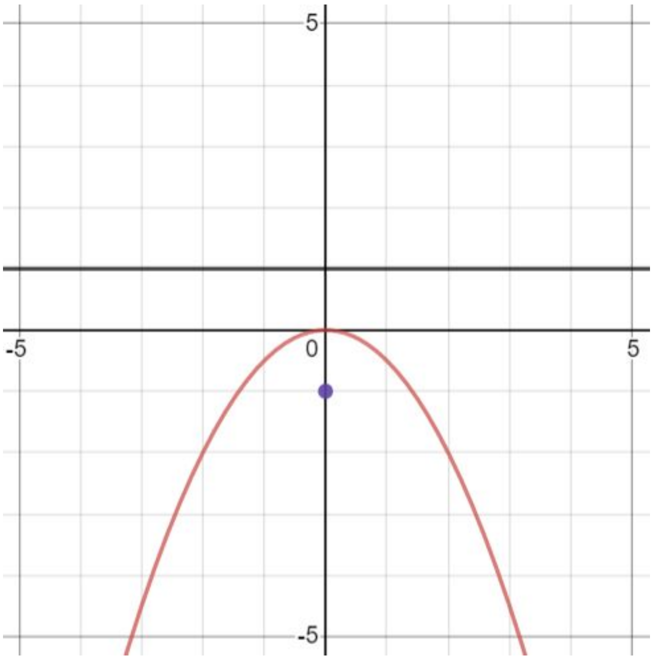
Уравнение параболы (ветви вверх):

$$x^2 = 2py$$



Уравнение параболы (ветви вниз):

$$x^2 = -2py$$



Уравнение параболы со смещенной вершиной (ветви влево):

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

Аналогично для других направлений ветвей

2.13. Поверхности второго порядка

Определение. Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность S, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0, \quad (*)$$

где не все коэффициенты при членах второго порядка одновременно равны нулю.

2.13.1. Невырожденные поверхности

Если поверхность невырожденная, то существует преобразование декартовой прямоугольной системы координат такое, что уравнение (*) может быть приведено к одному из канонических видов.

2.13.1.1. Эллипсоид

Каноническое уравнение эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

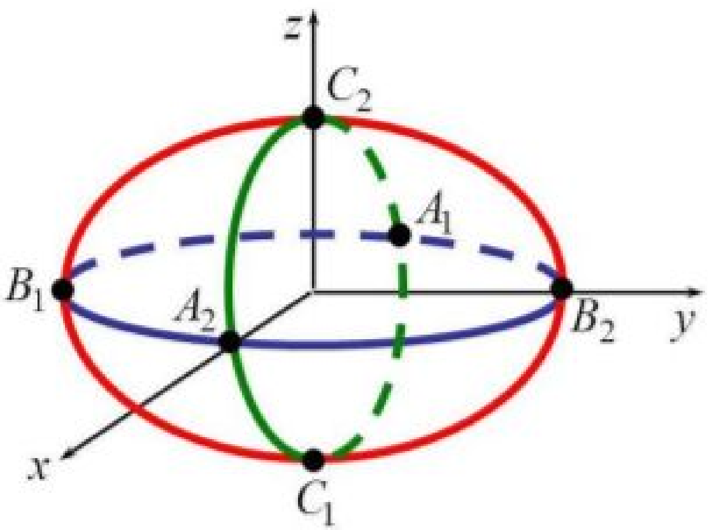
Уравнение сферы с радиусом R:

В частном случае, если a=b=c=r, уравнение примет вид

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

При сечении эллипсоида одной из координатных плоскостей (z=0 или x=0 или y=0) получается эллипс. Например, при z=0

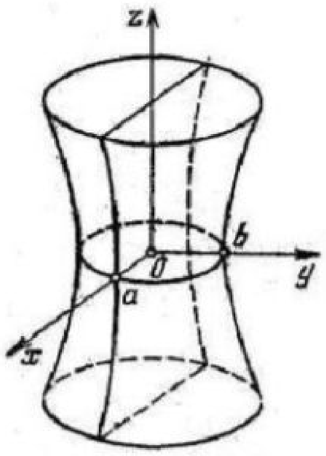
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



2.13.1.2. Гиперболоид

Каноническое уравнение **однополостного** гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



При пересечении однополостного гиперболоида плоскостью z=0 получается эллипс, заданный уравнением

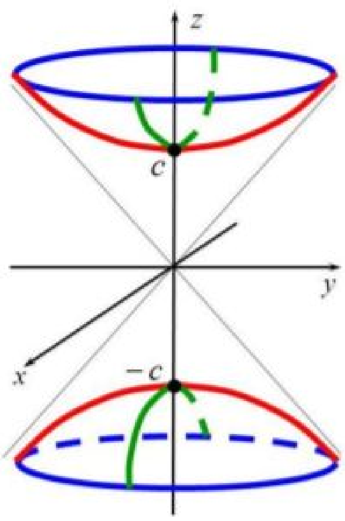
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

А при пересечении однополостного гиперболоида одной из плоскостей x=0 или y=0 – гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ соответственно.}$$

Каноническое уравнение **двуполостного** гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

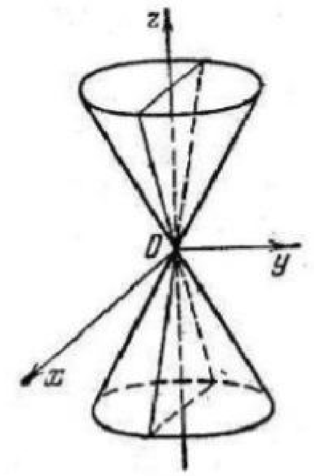


При пересечении двуполостного гиперболоида одной из плоскостей x=0 или y=0 получаются гиперболы

2.13.1.3. Конус второго порядка

Каноническое уравнение конуса второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



Для получения пересечения конуса с плоскостью XOY подставим в уравнение конуса z=0:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

Решением этого уравнения является точка O(0;0;0)

При пересечении конуса с плоскостями z=±c получаем эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

Пересечением конуса с координатной плоскостью YOZ является пара прямых:

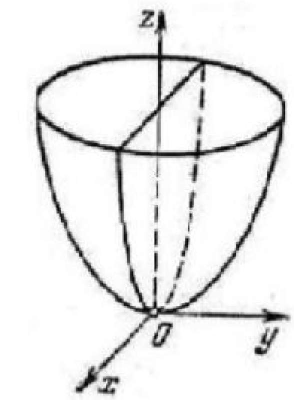
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{c}{b}y \\ z=-\frac{c}{b}y \end{array}\right.$$

Аналогично, получается пара пересекающихся прямых при y=0 в плоскости XOZ.

2.13.1.4. Параболоид

Каноническое уравнение **эллиптического** параболоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z,$$



Сечение эллиптического параболоида плоскостью y=0 приводит к уравнению параболы

$$\frac{x^2}{a^2}=z$$

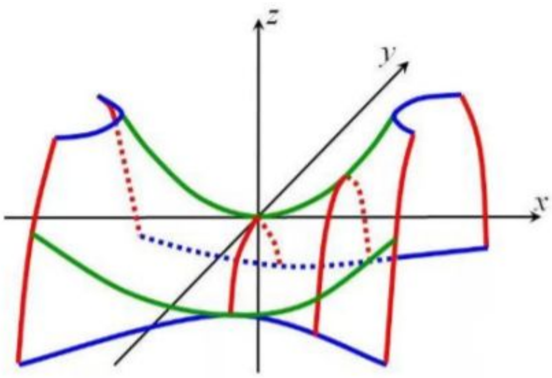
Это парабола в плоскости XOZ, ветви которой направлены вверх

В плоскости YOZ аналогично:

$$\frac{y^2}{b^2}=z$$

Каноническое уравнение **гиперболического** параболоида:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z.$$



В случае гиперболического параболоида пересечение поверхностей с координатными плоскостями являются параболы:

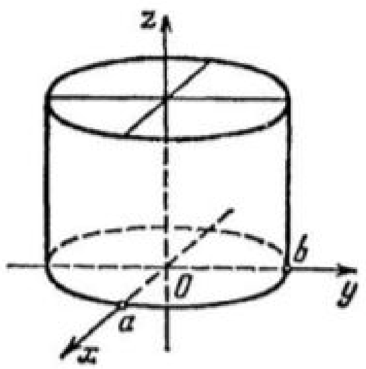
$$\frac{x^2}{a^2}=z \text{ в плоскости } XOZ\ (y=0) \text{ и } -\frac{y^2}{b^2}=z \text{ в плоскости } YOZ\ (x=0).$$

Кроме того, пересечением поверхности с горизонтальной плоскостью z = const является гипербола

2.13.1.5. Цилиндр второго порядка

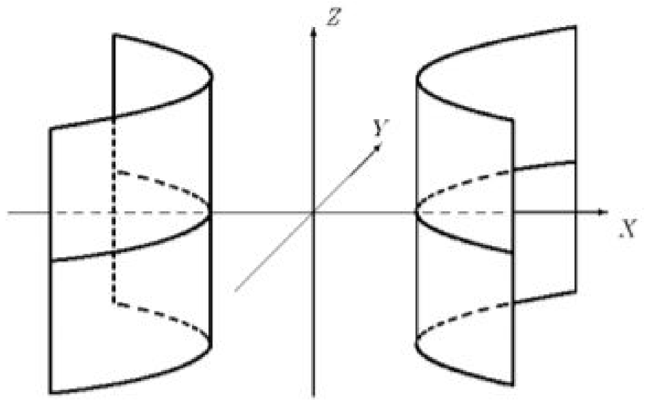
Каноническое уравнение **эллиптического** цилиндра:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



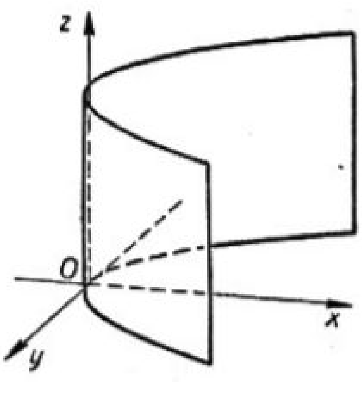
Каноническое уравнение **гиперболического** цилиндра:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Каноническое уравнение **параболического** цилиндра:

$$y^2 = 2px \ (p > 0)$$



2.13.2. Вырожденные поверхности

Уравнение **мнимого эллипсоида:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Уравнение **мнимого конуса:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Уравнение **мнимого эллиптического цилиндра:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Уравнение **пары мнимых пересекающихся плоскостей:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Уравнение **пары пересекающихся плоскостей:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Уравнение **пары параллельных плоскостей:**

$$x^2 - a^2 = 0$$

Уравнение **пары мнимых параллельных плоскостей:**

$$x^2 + a^2 = 0$$

Уравнение **пары совпадающих плоскостей:**

$$x^2 = 0$$

2.14. Действия с комплексными числами

Выполнить действия. Ответ представить в алгебраической форме

$$z = \frac{(-8+8\sqrt{3}i)^{21}}{2^{84}}$$

Определяем четверть:

$$-8+8\sqrt{3}i = (-8; 8\sqrt{3}) \in \text{II четверть}$$

Находим модуль комплексного числа:

$$|z'| = \sqrt{64+64\cdot 3} = 8\cdot 2 = 16$$

<u>Формула нахождения модуля комплексного числа:</u>

$$|A| = \sqrt{a^2+b^2}$$

, где a - действительная часть, b - мнимая часть

Находим аргумент комплексного числа (учитываем особенности четверти):

$$\arg z' = \operatorname{arctg}\left(-\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

<u>Формула нахождения аргумента комплексного числа:</u>

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x>0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x<0, y\geqslant 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x<0, y<0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0. \end{cases}$$

, где y - мнимая часть, x - действительная часть

Представляем число в тригонометрической, а затем в показательной форме:

$$z' = 16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

<u>Тригонометрическая форма комплексного числа:</u>

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

, где r - модуль комплексного числа, φ - аргумент комплексного числа

Показательная форма комплексного числа:

$z = re^{\varphi i}$, где r - модуль комплексного числа, φ - аргумент комплексного числа

Возведем комплексное число в необходимую степень и вернёмся к тригонометрической форме:

$$z'^{21} = 16^{21} e^{i \cdot 21 \cdot \frac{2\pi}{3}} = 16^{21}\left(\cos(14\pi) + i\sin(14\pi)\right)$$

Посчитаем:

$$16^{21}\left(\cos(0) + i\sin(0)\right) = 16^{21} \cdot (1 + i \cdot 0) = 16^{21}$$

Подставим в исходное выражение и найдем результат:

$$z = \frac{16^{21}}{2^{84}} = \frac{2^{84}}{2^{84}} = 1$$

2.15.1. Решить уравнение и изобразить корни на комплексной плоскости

$$z^6-4z^3+8=0$$

Найдём корни методом замены переменной:

$$t=z^3$$

$$t^2-4t+8=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{4+\sqrt{-16}}{2} \\ t_2=\dfrac{4-\sqrt{-16}}{2} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=2+2i \\ t_2=2-2i \end{array}\right.$$

$$z=\sqrt[3]{2\pm 2i}$$

Найдем модули и аргументы полученных комплексных чисел:

Числа $2+2i$ и $2-2i$ сопряжённые, поэтому модули у них равны: $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$$\arg z=\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\arg z=\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

Представим корни в тригонометрической форме:

$$z_{1,2,3}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2$$

$$z_{4,5,6}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\cdot\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2$$

Формула нахождения корня n-ой степени из комплексного числа:

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right),$$

$$где\quad k=0,1,\ldots,(n-1)$$

, где n - степень корня, r - модуль комплексного числа, α - аргумент комплексного числа

Посчитаем все корни:

$$z_1 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{9\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

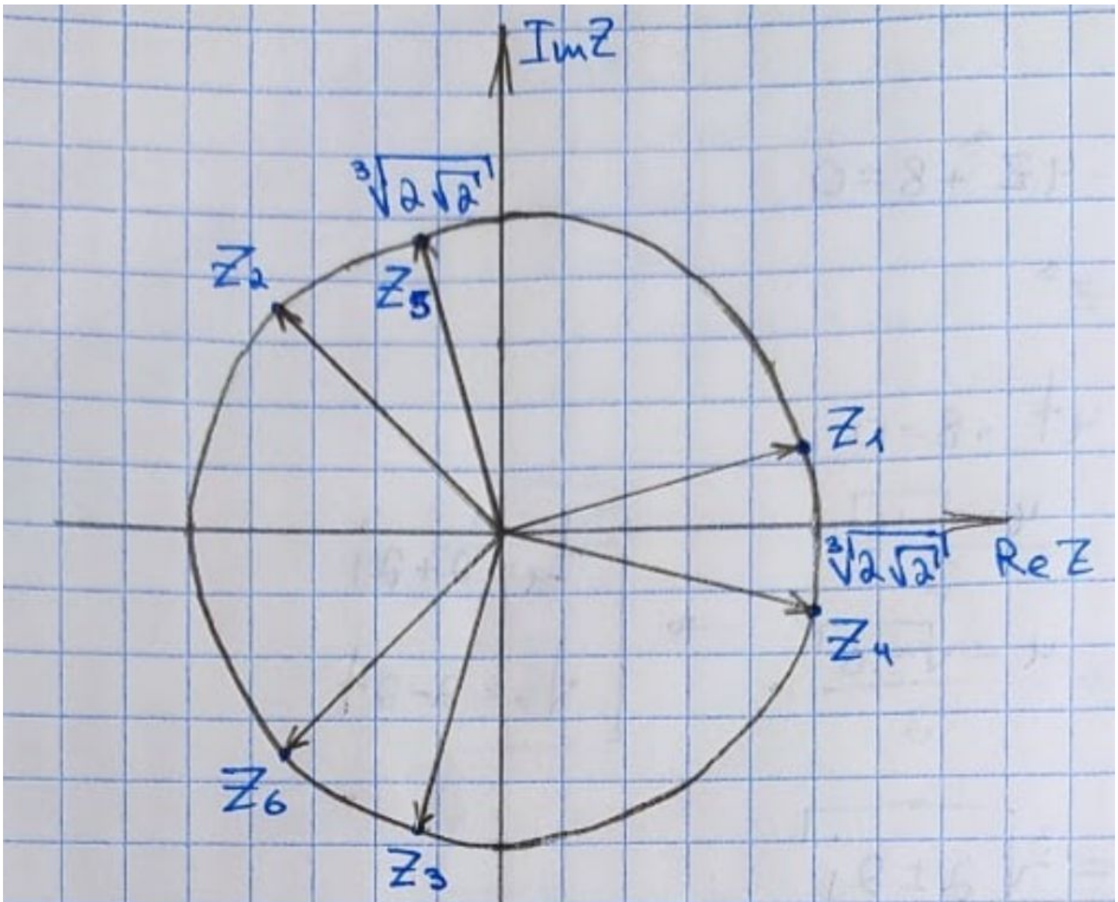
$$z_3 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

$$z_4 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$z_5 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$z_6 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{15\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

Представим корни на комплексной плоскости:



Для этого необходимо начертить окружность радиуса r и отметить на ней точки, на найденных величинах углов (аргументы комплексных корней)

2.15.2. Решить уравнение и изобразить корни на комплексной плоскости

$$z^2+(3+2i)z+1+3i=0$$

Найдем дискриминант:

$$D=(3+2i)^2-4\cdot(1+3i)=9+4i^2-4-12i+12i=5+4i^2=5-4=1$$

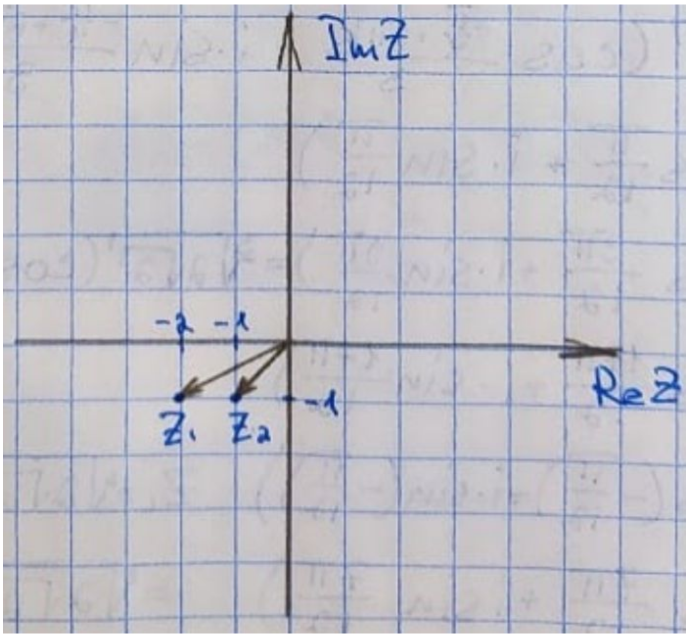
Найдём корни:

$$z_{1,2}=\frac{-3-2i\pm 1}{2}$$

Посчитаем корни:

$$z_1=-2-i \qquad z_2=-1-i$$

Изобразим корни на комплексной плоскости:



Для этого отметим точки на плоскости, ReZ - действительная часть комплексного, ImZ - мнимая часть комплексного числа

2.16. Разложить многочлен на линейные множители

$$p(z) = z^3 - 3z^2 + z - 3 = (z-3)(z^2+1) = (z-3)(z-i)(z+i)$$

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 3z^2 + z - 3 & z - 3 \\ \cline{2-2} -\ (z^3 - 3z^2) \qquad\quad & z^2 + 1 \\ \cline{1-1} z - 3 & \\ -\ (z - 3) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = -1$$

$$z = \pm i$$

1. Находим делитель свободного члена
2. Делим многочлен на **(неизвестная - найденный делитель)**
3. Записываем **(неизвестная - найденный делитель)** как первый множитель
4. Если максимальная степень частного превышает 2, то повторяем пункты 1-4, иначе смотрим пункт 5
5. Если степень частного равна 2, но находим корни любым удобным способом и записываем **(неизвестная - найденные корни)** как множители, если степень частного меньше 2, то записываем частное как множитель

2.17. Разложить многочлен на линейные множители, если известен один из корней

$$P(z) = z^4 - 6z^3 - 19z^2 + 154z - 130 = \qquad z_0 = 5+i$$

$$= (z-1)(z+5)(z^2-10z+26) = (z-1)(z+5)(z-(5+i))(z-(5-i))$$

$$\begin{array}{l|l}
z^4 - 6z^3 - 19z^2 + 154z - 130 & z-1 \\
\hline
-\;z^4 - z^3 & z^3 - 5z^2 - 24z + 130 \\
\quad -5z^3 - 19z^2 & \\
\quad -\;-5z^3 + 5z^2 & \\
\qquad -24z^2 + 154z & \\
\qquad -\;-24z^2 + 24z & \\
\qquad\quad 130z - 130 & \\
\qquad\quad -\;130z - 130 & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
z^3 - 5z^2 - 24z + 130 & z+5 \\
\hline
-\;z^3 + 5z^2 & z^2 - 10z + 26 \\
\quad -10z^2 - 24z & \\
\quad -\;-10z^2 - 50z & \\
\qquad 26z + 130 & \\
\qquad -\;26z + 130 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$z^2 - 10z + 26 = 0$$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 26}}{2}$$

$$z = \frac{10 \pm 2\sqrt{-1}}{2}$$

$$z = 5 \pm i$$

Решаем аналогично 2.16. или:

1. Находим сопряженный корень
2. Перемножаем
   (неизвестная - известный корень) и **(неизвестная - сопряженный корень)**
3. Многочлен из условия делим на многочлен, полученный в пункте 2
4. Раскладываем частное на множители как делали это в 2.16.

Дополнительно

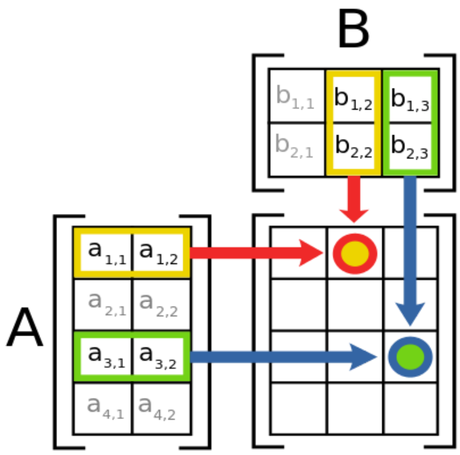
В индексе элемента сначала указывается строка, затем столбец

$$A = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 51 & 37 & -9 & 0 & 9 & 97 \\ 1 & 2 & 3 & 41 & 59 & 6 \\ -17 & -15 & -13 & -11 & -8 & -5 \\ 52 & 31 & -4 & -1 & 17 & 90 \end{array}\right) \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \textit{вторая строка} \\ a_{25} = 59 \\ \\ \end{array}$$

пятый

столбец

Вырожденная матрица - квадратная матрица, определитель которой равен нулю
Невырожденная матрица - квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля
Матрица обратима (**существует обратная матрица**), если определитель не равен нулю (невырожденная) и матрица является квадратной
Умножение матриц



СЛУ совместна, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы
СЛУ несовместна, когда ранг её основной матрицы отличен от ранга её расширенной матрицы
СЛУ однородна, когда все свободные члены равны 0
Однородная СЛУ всегда совместна и имеет *тривиальное* решение (все неизвестные равны 0)
СЛУ неоднородна, когда один или больше свободных членов отличны от 0
СЛУ определенная, когда она совместна и ранг основной матрицы равен числу неизвестных (имеет только одно решение)
СЛУ неопределённая, когда она совместна и ранг основной матрицы меньше числа неизвестных (имеет бесконечно много решений)