Типовой расчет. Задача 2

Имеем: $L(y)=a(x)\cdot y''+b(x)\cdot y'+c(x)\cdot y$

$a(x)=x^2+1$
$b(x)=-2x$
$c(x)=2$
$y_1(x)=x$
$f(x)=2x^3+6x$

① Проверить, что $y_1(x)$ есть частное решение однородного уравнения $L(y)=0$. Зная это, найти общее решение уравнения $L(y)=0$.

Решение. В нашем случае:

$$\boxed{(x^2+1)y''-2x\cdot y'+2\cdot y=0} \quad \text{- - - - - - (1)}$$

Проверим, что $y_1=x$ есть частное решение:
Проверим в (1):

$y_1=x;\ y_1'=1,\ y_1''=0$. Подставим

$(x^2+1)\cdot 0-2x\cdot 1+2x=-2x+2x\equiv 0. \Rightarrow y_1(x)=x$ - есть решение

Общее решение ищем в виде:

Замена:

$\boxed{y(x)=y_1(x)\cdot z(x)} \Rightarrow \boxed{y(x)=x\cdot z}$

$y'(x)=(x\cdot z)'=1\cdot z+x\cdot z'$

$y''(x)=z'+z'+xz''=2z'+xz''$

Подставим эти значения в (1):

$(x^2+1)\cdot(2z'+xz'')-2x\cdot(z+xz')+2\cdot xz=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z''(x^2+1)+z'(2x^2+2-2x^2)+z(-2x+2x)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{z''(x^2+1)x+z'\cdot 2=0} \quad \text{- - - - - - (2)}$$

Решаем ур. (2). $z(x)$ в (2) отсутствует.

Замена:
$z'=u(x)$
$z''=u'(x)$

Ур. (2) примет вид:

$$\boxed{u'\cdot(x^2+1)\cdot x+u\cdot 2=0} \quad \text{- - - (3)}$$

Ур-ние (3) – это ур. с раздел. переменными.

$$\frac{du}{dx}\cdot(x^2+1)\cdot x=-2\cdot u \Rightarrow \frac{du}{u}=-\frac{2}{x(x^2+1)}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{u}=-2\cdot\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{x(x^2+1)}\equiv\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \ln|u|=-2\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx \Rightarrow \ln|u|=-2\ln|x|-2\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$$

(но $x\,dx=\frac{1}{2}dx^2=\frac{1}{2}d(x^2+1)$). тогда:

$$\ln|u|=-2\ln|x|+2\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|u|=\ln\frac{1\cdot(x^2+1)}{x^2}+\ln c \Rightarrow$$

$\Rightarrow u=C_1\cdot\frac{x^2+1}{x^2}$, но ~~u~~ $u(x)=z'(x)$, тогда:

$$z'=C_1\cdot\frac{x^2+1}{x^2} \Rightarrow \boxed{z'=C_1\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \text{ ---- (4)}$$

Решаем ур. (4):

$$\frac{dz}{dx}=C_1\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow dz=C_1\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=C_1\cdot\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx \Rightarrow \boxed{z(x)=C_1x+C_1\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+C_2}$$

Но $y(x)=z(x)\cdot y_1(x) \Rightarrow y(x)=C_1x^2-C_1+C_2x$ или:

$\boxed{y(x)=C_1(x^2-1)+C_2x}$ – это и есть общее реш.

2ой способ: (по ф-ле Остроградского – Лиувилля)

$y_1(x)=x$ – частное решение.

пусть $y_2(x)$ – искомое общее решение.

Тогда по ф-ле Остр. – Л. имеем:

$$\boxed{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C_1\cdot e^{-\int\frac{-2x}{x^2+1}dx}}; \quad \int\frac{(-2x)}{x^2+1}dx = -\ln(x^2+1);$$

$$e^{-\int\frac{(-2x)}{x^2+1}dx} = e^{\ln(x^2+1)} = x^2+1.$$ Учитывая, что $y_1(x)=x$, $y_1'(x)=1$,

Имеем: $$\begin{vmatrix} x & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = C_1(x^2+1) \Rightarrow x y_2' - y_2 = C_1(x^2+1) \;/:x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x y_2' - y_2}{x^2} = C_1\,\frac{x^2+1}{x^2}.$$ Замечаем, что

$$\left(\frac{x y_2' - y_2}{x^2}\right) = \left(\frac{y_2}{x}\right)';$$ тогда: $$\left(\frac{y_2}{x}\right)' = C_1\,\frac{x^2+1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int d\left(\frac{y_2}{x}\right) = \int C_1\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx \Rightarrow \frac{y_2}{x} = C_1 x - \frac{C_1}{x} + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y_2(x) = C_1(x^2 - C_1) + C_2 x}$$ } это и есть общее решение.

$$u = \frac{1}{(x^2-1)^2}\cdot e^{-2\operatorname{arctg} x}\cdot C$$

Часть (2) (стр. 3)

2) Найти общее решение неоднородного уравнения $L(y)=f(x)$, предположив, что одно из частных решений уравнения $L(y)=f(x)$ является многочленом.

Решение: Имеем:

$$\boxed{(x^2+1)\cdot y'' - 2xy' + 2y = 2x^3+6x} \quad ---- (5)$$

$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$, $y_{чн}$ ищем в виде:

$y_{чн} = Ax^3+Bx^2+Cx+D$; $\Rightarrow$ подставляем в ур. (5)

$\Rightarrow y'_{чн} = 3Ax^2+2Bx+C$

$y''_{чн} = 6Ax+2B$.

$$\Rightarrow (x^2+1)(6Ax+2B) - 2x(3Ax^2+2Bx+C)+2(Ax^3+Bx^2+Cx+D) \equiv 2x^3+6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3(6A - \cancel{6A} + 2A) + x^2(2B-4B+2B) + x(6A-2C+2C) + (2B+2D) \equiv 2x^3+6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2\cdot x^3\cdot A + x^2\cdot 0 + x\cdot 6A + (2B+2D) \equiv 2x^3+6x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2A=2 \Rightarrow A=1$; $6A=6 \Rightarrow A=1$.

$2B+2D=0$, т.к. мы ищем частное решение, то можем взять $-B=D=0$. И окончательно:

$\boxed{y_{чн} = x^3}$; тогда:

$$\boxed{y_{он} = \underbrace{C_1(x^2-1) + C_2\cdot x}_{y_{оо}} + \underbrace{x^3}_{y_{чн}}}$$