Экзаменационный билет №4

1. (6 баллов) Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (6 баллов) Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0. \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

3. (7 баллов) Найти образ, ядро, ранг и дефект линейного оператора $\hat{A}: L \to L$, где $L = \{f(x) = a + b\sin x + c\cos x : a, b, c \in R\}$, $\hat{A}f(x) = f''(x) + f(x)$.

4. (8 баллов) Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}: L \to L$, где $L = \{p(t) = at^2 + bt: a, b \in R\}$, $\hat{A}p(t) = t \cdot p'(t)$.

5. (7 баллов) Исследовать квадратичную форму $\Phi(\bar{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$ на знакоопределенность.

6. (8 баллов) В двумерном евклидовом пространстве матрица Грама и векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в базисе $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ соответственно равны $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найти длины векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$ и угол между ними.

7. (8 баллов) Ортогональным преобразованием переменных приведите квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2) = -4x_1^2 - 2\sqrt{7}x_1x_2 + 2x_2^2$ к каноническому виду.