Вариант 1

Тема 2: Линейные операторы

1. В пространстве V_3 линейный оператор $\hat{A}$ – зеркальное отражение относительно плоскости Oxz.
   1) Найти матрицу A оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
   2) Найти образ вектора $\vec{x} = (2; 3; -1)$.
   3) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.
   4) Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.
   5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Доказать, что $\hat{A}$ - оператор простого типа и привести его матрицу к диагональному виду. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

3. В каноническом базисе пространства R^3 оператор $\hat{A}$ действует по правилу:
$$\hat{A}\vec{x} = (3x_3;\ x_3; x_1 + x_2)$$
   1) Показать линейность оператора $\hat{A}$.
   2) Найти матрицу оператора в каноническом базисе пространства R^3.
   3) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.
   4) Обратим ли оператор? 4)* Если да, то указать явный вид обратного оператора.
   5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.
   6) Является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа? Если да, то указать базис из собственных векторов и матрицу оператора в этом базисе.

Контрольная работа 1 (часть 2)

Вариант 2

Тема 2: Линейные операторы

1. В пространстве V_3 линейный оператор $\hat{A}$ - поворот против часовой стрелки на угол π вокруг оси Oy.
   1) Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
   2) Найти образ вектора $\vec{x} = (2; 4; -3)$.
   3) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.
   4) Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.
   5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$. Доказать, что $\hat{A}$ - оператор простого типа и привести его матрицу к диагональному виду. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

3. В пространстве P_2 оператор $\hat{A}$ действует по правилу: $\hat{A}p(t) = (t+1)p'(t)$.
   1) Показать, что $\hat{A}$ линейный оператор в P_2.
   2) Найти матрицу оператора в каноническом базисе пространства P_2.
   3) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.
   4) Обратим ли оператор? 4)* Если да, то указать явный вид обратного оператора.
   5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.
   6) Является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа? Если да, то указать базис из собственных векторов и матрицу оператора в этом базисе.

Вариант 3

Тема 2: Линейные операторы

1. В пространстве V_3 линейный оператор $\hat{A}$ - гомотетия с коэффициентом $k = -1/3$.
   1) Найти матрицу A оператора в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.
   2) Найти образ вектора $\vec{x} = (-2; 3; -5)$.
   3) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.
   4) Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.
   5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Доказать, что $\hat{A}$ - оператор простого типа и привести его матрицу к диагональному виду. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

3. В каноническом базисе пространства R^3 оператор $\hat{A}$ действует по правилу:
$$\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 4x_2 + 5x_3;\ -4x_1 + x_2 + 3x_3;\ x_3)$$
   1) Показать линейность оператора $\hat{A}$.
   2) Найти матрицу оператора в каноническом базисе пространства R^3.
   3) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.
   4) Обратим ли оператор? 4)* Если да, то указать явный вид обратного оператора.
   5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.
   6) Является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа? Если да, то указать базис из собственных векторов и матрицу оператора в этом базисе.

Контрольная работа 1 (часть 2)

Вариант 4

Тема 2: Линейные операторы

1. В пространстве V_3 линейный оператор $\hat{A}$ - проекция на плоскость Oyz.
   1) Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.
   2) Найти образ вектора $\vec{x} = (7; 3; -1)$.
   3) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.
   4) Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.
   5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Доказать, что $\hat{A}$ - оператор простого типа и привести его матрицу к диагональному виду. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

3. В пространстве P_2 оператор $\hat{A}$ действует по правилу: $\hat{A}p(t) = 2p(t) - p'(t)$.
   1) Показать, что $\hat{A}$ линейный оператор в P_2.
   2) Найти матрицу оператора в каноническом базисе пространства P_2.
   3) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.
   4) Обратим ли оператор? 4)* Если да, то указать явный вид обратного оператора.
   5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.
   6) Является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа? Если да, то указать базис из собственных векторов и матрицу оператора в этом базисе.