МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МИРЭА - РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

II семестр

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Для студентов очной формы обучения

институтов РТС, ИТ, Физико-технологического института

Москва-2021

УДК 512+514
ББК 22.14+22.15
А-45

Алгебра и геометрия, 2 семестр[Электронный ресурс]**:** Методическое пособие / Кузнецова Е.Ю., Малыгина О.А., Морозова Т.А. и др.- М.: МИРЭА-1 электрон.опт. диск (CD-ROM)

Пособие «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» (2-ой семестр) предназначено для студентов очной формы обучения институтов ИТ, РТС, Физико-технологического института. В него входят следующие разделы: линейные пространства, линейные операторы, квадратичные формы, геометрия евклидова пространства.

Авторский коллектив: Кузнецова Екатерина Юрьевна, Морозова Татьяна Анатольевна, Малыгина Ольга Анатольевна, Пронина Елена Владиславовна, Параскевопуло Ольга Ригасовна, Руденская Ирина Николаевна, Таланова Людмила Ивановна, Чекалкин Николай Степанович.

Редактор:
Чекалкин Николай Степанович., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики-2 Физико-технологического института, Российский технологический университет

Рецензенты:
Кесельман Владимир Михайлович, к.ф-м.н.,доцент, доцент кафедры прикладной математики МАМИ;
Игонина Татьяна Романовна, к.ф-м.н., доцент,доцент кафедры высшей математики-2 Физико-технологического института, Российский технологический университет

Оглавление

Введение

Данное пособие разработано коллективом преподавателей кафедры высшей математики-2 Московского технологического университета (МИРЭА) для студентов очной формы обучения институтов РТС, Информационных технологий и Физико-технологического института. Пособие содержит обзор основных тем курса алгебры и геометрии 2-го семестра, список теоретических вопросов для подготовки к сдаче экзамена (зачета), перечень рекомендуемой литературы. Приведены примерные варианты контрольных работ по курсу, образец билета, также представлены основные типы задач по алгебре и геометрии 2-го семестра.

Пособие состоит из двух частей. *Часть 1* – это основные типы задач для подготовки к контрольным работам, экзамену (зачету). Для успешного овладения материалом рекомендуется прорешать все задачи первой части.

Часть 2 – типовой расчет, каждый студент выполняет свой вариант задачи из второй части. Задания второй части также используются для подготовки к контрольным работам и экзамену (зачету).

В данном пособии представлены, во-первых, традиционные задачи алгебры и геометрии (2-ой семестр). Для этих задач выделены уровни сложности: стандартные задачи и задачи повышенной трудности (для углубленного изучения материала). Во-вторых, введены задачи прикладного характера, возникающие в специальных дисциплинах. Здесь же есть задачи, встречающиеся в курсе дифференциальных уравнений.

Выполнение заданий настоящего пособия предполагает использование материала целого ряда дисциплин. Во-первых, по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» (1-ый семестр) рекомендуется повторить такие разделы, как алгебра матриц, решение систем линейных уравнений, векторы. Во-вторых, по курсу математического анализа 1-го семестра следует повторить раздел «Дифференцирование». В-третьих, успешное овладение материалом 2-го семестра по алгебре и геометрии возможно при наличии прочных знаний и умений по элементарной математике (тригонометрии, алгебре, геометрии).

Методические указания

Пособие по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» (2-ой семестр) содержит задачи по следующим разделам: линейные пространства и подпространства; линейные операторы; квадратичные формы; евклидово пространство.

От студента требуется успешное овладение материалом по указанным разделам, т.е. необходимо знать определения понятий, формулировки и доказательства основных теорем курса. Студент также должен продемонстрировать умение решать типовые задачи данного курса.

По курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» 2-ой семестр проводятся *2 контрольные работы и выполняется типовой расчет.*

Контрольная работа №1 *«Линейные пространства. Линейные операторы.»*

Примерный вариант контрольной работы №1

1). Доказать, что множество многочленов $L = \{p(x) = (a-b)x^2 + (a+b)x + b,\ a,b \in R\}$ образует линейное подпространство в пространстве P_2 многочленов степени не выше 2. Найти размерность и базис подпространства L. Дополнить базис подпространства L до базиса всего пространства.

2). В пространстве V_3 заданы векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Показать, что система $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ образует базис в пространстве V_3. Найти матрицу перехода от базиса S к каноническому базису и координаты вектора $\vec{x} = 4\vec{i} - 18\vec{j} + 12\vec{k}$ в базисе S.

3). В пространстве V_3 линейный оператор $\hat{A}$ - проектирование на плоскость XOY. Найти:
– матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$,
– образ вектора $\vec{x} = (3,-4,5)$,
– ядро и образ оператора.
Существует ли обратный оператор?
Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.
Будет ли $\hat{A}$ оператором простого типа?

4). В каноническом базисе пространства R^3 оператор $\hat{A}$ действует по правилу $\hat{A}$x = $(x_1, x_2 - 3x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$. Показать линейность оператора $\hat{A}$. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе. Найти ядро и образ оператора. Обратим ли оператор? Если да, то указать явный вид обратного оператора. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$. Будет ли $\hat{A}$ оператором простого типа?

Контрольная работа №2 проводится по теме *«Квадратичные формы . Евклидово пространство»*.

<u>Примерный вариант контрольной работы №2</u>

1. Дана квадратичная форма $\varphi(\overline{x}) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

   а) исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

   б) привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции.

2. Матрица Грама скалярного произведения в базисе $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ имеет вид

G=$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

   а) найти длины базисных векторов и угол между ними,

   б) найти угол между векторами $\vec{x}= \overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$ и $\vec{y}= 2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$

   с) ортогонализировать базис $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

<u>Замечание</u>: по усмотрению преподавателя количество задач контрольных работ может быть изменено.

Типовой расчет выполняется каждым студентом в отдельной тетради в соответствии с назначенным ему номером варианта. Студент подробно описывает решение каждой задачи, объясняет решения задач преподавателю, отвечает на вопросы. *Наличие выполненного типового расчета является обязательным условием допуска студента на экзамен или зачет.*

По итогам обучения на основе учебного плана проводится экзамен**.**

Примерный вариант экзаменационного билета

1. Доказать, что векторы вида (a, b-a, $2a$+b), $a,b \in R$, образуют линейное подпространство в пространстве R^3. Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.
2. В пространстве V_3 линейный оператор $\hat{A}$ – оператор проектирования на ось OZ. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе (i, j, k). Найти образ вектора $x = 2i - j + 3k$. Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$. Существует ли обратный оператор?
3. Квадратичную форму $\varphi(\bar{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ привести к каноническому виду методом Лагранжа. Найти положительный, отрицательный индексы и ранг формы. Исследовать на знакоопределенность по каноническому виду и по критерию Сильвестра.
5. Матрица Грама в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ имеет вид $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Найти длины базисных векторов и угол между ними. Ортогонализировать базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.
6. Теоретический вопрос (из списка теоретических вопросов).
7. В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 оператор $\hat{A}$ действует по правилу $\hat{A}(p(t)) = tp'(t)-2p(t-1)$. Показать линейность оператора. Найти его матрицу в каноническом базисе и в базисе S=(t^2, t^2-1, t^2-2t).

Замечание: по усмотрению преподавателя количество задач билета может быть изменено.

Теоретические вопросы по курсу

1. Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств. Размерность и базис линейного пространства.
2. Определение линейного подпространства. Примеры.
3. Преобразование координат вектора при переходе к другому базису.
4. Линейный оператор, его свойства. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.
5. Ядро и образ линейного оператора. Обратный оператор. Матрица обратного оператора. Критерий обратимости линейного оператора.
6. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
7. Линейные операторы простого типа. Достаточное условие оператора простого типа. Матрица оператора простого типа.

8. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене базиса.
9. Канонический вид квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм.
10. Знакоопределенные квадратичные формы. Их канонический вид, индексы и ранг. Критерий Сильвестра.
11. Определение евклидова пространства. Скалярное произведение в евклидовом пространстве.
12. Неравенство Коши - Буняковского. Длины векторов и углы между векторами в евклидовом пространстве.
13. Матрица Грама скалярного произведения. Критерий матрицы Грама. Преобразование матрицы Грама при замене базиса. Процесс ортогонализации базиса.

Часть 1
Основные типы задач
для подготовки к контрольным работам и экзамену (зачету)

Часть 1 построена следующим образом. По каждой теме курса алгебры и геометрии 2-го семестра приведены основные типы задач. Для успешной подготовки к контрольным работам и сдаче экзамена студенту рекомендуется выполнить все такие задачи. Также в части 1 содержатся дополнительные задачи – это задачи повышенной трудности по всем темам курса для углубленного изучения материала.

Особенностью пособия является расширение традиционного списка задач алгебры и геометрии задачами прикладного характера. Здесь же есть задачи из курса дифференциальных уравнений. Решение подобных задач раскрывает взаимосвязи между различными дисциплинами.

Полноценное усвоение материала алгебры и геометрии 2-го семестра строится на базе программы алгебры и геометрии 1-го семестра, на использовании знаний и умений по математическому анализу (1 семестр), а также на основе применения элементарной математики (алгебры, тригонометрии, геометрии).

Задачи по теме «Линейные пространства»

Задача 1.1. Найти ранг матрицы.

№		№	
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & -7 \\ -5 & -4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 1 & -17 & -3 & -19 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 17 & -9 & -8 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 1.2. Для системы векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вычислить линейную комбинацию $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

№		№	
1	$\vec{a} = (2,2,-2)$ $\vec{b} = (-2,-1,-2)$ $\vec{c} = (-3,-1,3)$ $\vec{d} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$	6	$\vec{a} = (-2,0,2)$ $\vec{b} = (-3,3,1)$ $\vec{c} = (1,1,1)$ $\vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$
2	$\vec{a} = (1,-1,-2)$ $\vec{b} = (-2,-1,3)$ $\vec{c} = (-3,-1,3)$ $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$	7	$\vec{a} = (-1,1,2)$ $\vec{b} = (-3,2,2)$ $\vec{c} = (1,-2,1)$ $\vec{d} = -3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$
3	$\vec{a} = (3,-2,0)$ $\vec{b} = (-1,4,5)$ $\vec{c} = (2,7,-1)$ $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$	8	$\vec{a} = (2,2,-2)$ $\vec{b} = (-1,3,4)$ $\vec{c} = (5,2,-1)$ $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$
4	$\vec{a} = (-1,-1,6)$ $\vec{b} = (2,2,-3)$ $\vec{c} = (3,2,2)$ $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$	9	$\vec{a} = (-2,3,-2)$ $\vec{b} = (1,2,3)$ $\vec{c} = (4,2,-1)$ $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$
5	$\vec{a} = (-2,3,3)$ $\vec{b} = (1,1,-5)$ $\vec{c} = (4,-1,1)$ $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$	10	$\overline{a} = (3,1,2)$ $\vec{b} = (-2,-2,-2)$ $\vec{c} = (-3,2,3)$ $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$

Задача 1.3. Выполнить следующие задания.

№1) Является ли множество векторов $L=\{(3,a+b,0,a)\}$, $a,b \in R$, линейным подпространством в R^4?

№2) Является ли множество векторов $L=\{(b,a+b,0,-2a)\}$, $a,b \in R$, линейным подпространством в R^4? Если да, то найти базис и размерность этого подпространства. Дополнить базис подпространства L до базиса всего пространства R^4.

№3) Является ли множество векторов $L=\{(2a-b,b,c,a+c)\}$, $a,b,c \in R$, линейным подпространством в R^4? Если да, то найти базис и размерность этого подпространства. Дополнить базис подпространства L до базиса всего пространства R^4.

№4) Является ли множество матриц $L=\{\begin{pmatrix} a & 4 \\ b & a \end{pmatrix}\}$, $a,b \in R$, линейным подпространством в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка M_{22}?

№5) Доказать, что множество матриц $L=\{\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}\}$, $a,b \in R$, образует линейное подпространство в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка M_{22}. Найти базис и размерность этого подпространства. Дополнить базис подпространства L до базиса всего пространства M_{22}.

№6) Доказать, что множество $L=\{P(x)=ax^2-bx+2a\}$ многочленов с вещественными коэффициентами образует линейное подпространство в линейном пространстве P_2 многочленов степени не выше 2. Найти размерность и базис L. Дополнить базис подпространства L до базиса всего пространства P_2.

№7) Доказать, что множество многочленов с вещественными коэффициентами $L=\{P(x)=(a+b)x^3+3bx^2+cx-6a\}$ образует линейное подпространство в линейном пространстве P_3 многочленов степени не выше 3. Найти размерность и базис L. Дополнить базис подпространства L до базиса всего пространства P_3.

Задачи по теме «Линейные операторы»

Задача 1.4. Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ действуют в пространстве R^2.

а) Проверить линейность операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

б) Написать матрицы линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в каноническом базисе пространства R^2.

в) Найти образ заданного вектора $\vec{x}$.

г) Найти ядро операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

д) Являются ли операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ обратимыми? Если являются, найти матрицу обратного оператора.

е) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

№ варианта	$\hat{A}\vec{x}$	$\hat{B}\vec{x}$	$\vec{x}$
1	(x_1+6x_2, x_1+2x_2)	$(x_1+x_2, -2x_1-2x_2)$	(1, 2)
2	$(4x_1+2x_2, 2x_1+x_2)$	$(3x_1+x_2, 2x_1+2x_2)$	(-1, 1)
3	$(2x_1-x_2, -x_1+2x_2)$	$(2x_1-x_2, -2x_1+x_2)$	(0, 2)
4	$(-2x_1-6x_2, x_1+3x_2)$	$(2x_1+6x_2, 2x_1+3x_2)$	(-2, 1)
5	$(-x_1+2x_2, -2x_1+3x_2)$	$(-4x_1-6x_2, 2x_1+3x_2)$	(1, 3)
6	$(x_1+3x_2, -2x_1-6x_2)$	$(-5x_2, -2x_1+3x_2)$	(-1, 0)
7	$(3x_1+5x_2, x_1-x_2)$	$(3x_1+x_2, -3x_1-x_2)$	(3, 2)
8	$(4x_1-2x_2, 2x_1-x_2)$	$(-3x_1+4x_2, 2x_1-x_2)$	(1, 4)
9	$(2x_1+3x_2, -x_2)$	$(2x_1+x_2, -4x_1-2x_2)$	(-2, 2)
10	$(-2x_1+x_2, 4x_1-2x_2)$	$(-2x_1+3x_2, 4x_1-3x_2)$	(0, -2)

Задача 1.5. Выполнить следующие задания.

№1) В пространстве V_2 линейный оператор $\hat{A}$ – поворот плоскости вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{4}$ против часовой стрелки. Найти:

– матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$;

– образ вектора $\vec{x} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$;

– ядро и образ оператора $\hat{A}$;

– матрицу обратного оператора.

№2) В пространстве V_3 линейный оператор $\hat{A}$ – проектирование на плоскость xoy, параллельно оси oz. Найти:

– матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;

– ядро и образ линейного оператора $\hat{A}$;

– собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

Существует ли обратный оператор? Является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа?

№3) В пространстве V_3 линейный оператор $\hat{A}$ – проектирование на ось OZ. Найти:

– матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$;

– ядро и образ линейного оператора $\hat{A}$;

– собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

Существует ли обратный оператор? Является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа?

№4) В пространстве V_3 линейный оператор $\hat{A}$ – зеркальное отражение относительно оси OX. Найти:

– матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$;

– ядро линейного оператора $\hat{A}$;

– образ вектора $\vec{a} = (4,-8,3)$;

– собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

Существует ли обратный оператор? Является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа?

№5) В пространстве V_3 линейный оператор $\hat{A}$ – зеркальное отражение относительно плоскости XOZ. Найти:

– матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$;

– ядро линейного оператора $\hat{A}$;

– образ вектора $\vec{a} = (3,-9,4)$;

– собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

Существует ли обратный оператор? Если да, то найти его матрицу в базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. Является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа?

№6) В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 задан оператор $\hat{A}p(x) = x \cdot p'(x)$.

a) Показать линейность оператора.

b) Найти его матрицу в каноническом базисе пространства P_2.

c) Найти образ многочлена $p(x) = 3x^2 - 5x + 6$.

d) Найти ядро линейного оператора $\hat{A}$.

e) Существует ли обратный оператор?

№7) В пространстве P_3 многочленов степени не выше 3 задан оператор $\hat{A}p(x) = p''(x)$.

a) Показать линейность оператора.

b) Найти его матрицу в каноническом базисе пространства P_3.

c) Найти ядро линейного оператора $\hat{A}$.

d) Существует ли обратный оператор?

№8) В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 задан оператор $\hat{A}p(x) = 2p'(x) - p(x)$.

a) Показать линейность оператора.

b) Найти его матрицу в каноническом базисе пространства P_2.

c) Найти ядро линейного оператора $\hat{A}$.

d) Существует ли обратный оператор? Если да, то найти его матрицу в каноническом базисе пространства P_2.

№9) Отображение $\hat{A}$ действует в линейном пространстве R^3. Проверить, является ли оператор $\hat{A}$ линейным оператором. В случае линейности записать матрицу оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства R^3.

а) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1 + 8, x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + 4x_3)$

б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1 + 3x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - 4x_2 + x_3)$.

№10) Для линейного оператора $\hat{A}$ из предыдущей задачи №9 определить:

a) Является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Если да, то найти матрицу обратного оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства R^3, сделать проверку.

b) Найти образ вектора $\vec{x}$=(1,-2 ,3).

c) Найти ядро линейного оператора $\hat{A}$.

d) Будет ли вектор $\vec{x} = (0,1,0)$ собственным вектором оператора $\hat{A}$?

В экономике используется математическая модель международной торговли. Задачи №11,№12 и №13 – это примеры использования такой модели.

№11) Структурная матрица торговли двух стран имеет вид $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Найти отношение национальных доходов $S_1:S_2$ двух стран, чтобы торговля была сбалансированной.

Указание. Найти собственный вектор структурной матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda=1$.

Замечание. Пусть собственный вектор структурной матрицы A для $\lambda=1$ имеет вид $\vec{a}=(a_1,a_2)^T$. Тогда сбалансированность торговли двух стран достигается, если отношение национальных доходов стран равно отношению координат собственного вектора $\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1}{a_2}$.

№12) Структурная матрица торговли трех стран имеет вид $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Найти отношение национальных доходов $S_1:S_2:S_3$ трех стран для сбалансированной торговли.

Указание. Вектор национальных доходов $\bar{S}=(S_1,S_2,S_3)^T$ должен быть пропорционален собственному вектору структурной матрицы A для $\lambda=1$.

№13) Известна структурная матрица торговли трех стран $A=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$. Как должны соотноситься национальные доходы этих трех стран, чтобы торговля была сбалансированной.

Задачи по теме «Квадратичные формы. Евклидово пространство»

<u>Задача 1.6</u>. Выписать квадратичную форму, матрица которой в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ имеет заданный вид. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность по критерию Сильвестра.

№ варианта		№ варианта	
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1/2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -7 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1/2 \\ 3 & -1/2 & 11 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1/3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1/3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} -13 & -7 & 4 \\ -7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -5 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

<u>Задача 1.7</u>. Установить, какие из заданных матриц являются матрицами Грама.

№		№	
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

2	$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Задача 1.8. Матрица Грама G скалярного произведения в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ имеет заданный вид. Найти длины базисных векторов и угол между ними. Найти с помощью заданной матрицы Грама угол между векторами $\vec{x} = (1,-2)$, $\vec{y} = (6,5)$.

№ варианта	G	№ варианта	G
1	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Дополнительные задачи

для подготовки к экзамену или зачету (задачи повышенной трудности)

В дополнение к основным типам задач по курсу алгебры и геометрии 2-го семестра предлагается перечень задач повышенной трудности для углубленного изучения материала.

№1. Доказать, что множество векторов $L=\{\vec{x}:(\vec{x}\vec{a})=0, \vec{a}=(2,-6,0)\}$ является линейным подпространством в пространстве V_3. Найти базис и размерность *L*. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

Замечание: $(\vec{x},\vec{a})$ - это скалярное произведение векторов.

№2. Доказать, что множество векторов $L=\{\vec{x}:[\vec{x},\vec{a}]=0, \vec{a}=(2,1,-4)\}$ является линейным подпространством в пространстве V_3. Найти базис и размерность *L*. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

Замечание: $[\vec{x},\vec{a}]$ - это векторное произведение векторов.

№3. Образуют ли векторы

$\vec{a}=(1,2,-1,0)$, $\vec{b}=(3,1,0,1)$, $\vec{c}=(4,-1,2,1)$, $\vec{d}=(-1,3,2,1)$

базис в линейном пространстве R^4?

№4. Пусть *L*- это множество многочленов $p\in P_3$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих условию $p(0)+p'(-1)=0$. Доказать, что *L* является линейным подпространством в P_3. Найти базис подпространства *L*.

№5. Пусть *L*- это множество многочленов $p\in P_3$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих условию $p''(1)=0$. Доказать, что *L* является линейным подпространством в P_3. Найти базис и размерность подпространства *L*. Дополнить базис подпространства *L* до базиса всего пространства P_3. Найти матрицу перехода от канонического базиса P_3 к построенному базису.

№6. Множество $L = \{$ матрицы, перестановочные с матрицей $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Доказать, что L является линейным подпространством в пространстве матриц M_{33}. Найти базис и размерность подпространства L. Проверить, что матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ принадлежит подпространству L. Найти координаты матрицы A в найденном базисе подпространства L.

№7. Исследовать на линейную зависимость или независимость системы функций:

1) $\{\sin^2 3x, \cos 6x, 2\}$, $x \in R$; 2) $\{e^{5x}, 5xe^{5x}, x^2 e^{5x}\}$, $x \in R$;

3) $\{1,\ \ln 2x,\ \ln x^3\}$, $x \in (0, +\infty)$; 4) $\{1, e^{3x}, xe^{3x}, x^2 e^{3x}\}$, $x \in R$.

В курсе дифференциальных уравнений используется определитель Вронского. С его помощью устанавливается линейная независимость системы функций, являющихся решениями линейного дифференциального уравнения.

№8. Определителем Вронского $W(x)$ системы функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Если определитель Вронского $W(x)$ системы функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ не равен тождественно нулю при $x \in (a,b)$, то система функций линейно независима в интервале (a,b).

Вычислить определитель Вронского и доказать линейную независимость системы функций:

1) $\{e^{2x}\sin 3x, e^{2x}\cos 3x, e^{5x}\}$, $x \in R$; 2) $\{1, e^{4x}, xe^{4x}, x^2 e^{4x}\}$, $x \in R$;

3) $\{\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x\}$, $x \in R$; 4) $\{1, x, \sin x,\ \cos x\}$, $x \in R$.

№9. Доказать, что множество L функций $f(x)$, $x \in R$, является линейным подпространством в пространстве непрерывных функций. Найти базис и размерность подпространства L.
1) $L = \{a + 4b \cdot ch2x + 3c \cdot e^{2x}\}$; 2) $L = \{a \cdot \cos 2x + b \cdot \sin 2x + c \cdot \sin 4x\}$.

№10. В пространстве V_3 оператор $\hat{A}$ действует по правилу $A\vec{x} = (\vec{x}, \vec{a}) \cdot \vec{a}$, где $\vec{a} = (1,1,1)$. Проверить, что $\hat{A}$ - линейный оператор. Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Найти ядро и образ линейного оператора $\hat{A}$. Существует ли обратный оператор? Является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа?

№11. В пространстве V_3 оператор $\hat{A}$ действует по правилу $A\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}] + \vec{x}$, где $\vec{a} = (4,2,0)$. Проверить, что $\hat{A}$ - линейный оператор. Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Существует ли обратный оператор?

№12. Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ действуют в линейном пространстве R^3 по правилу $\hat{A}\vec{x} = (x_1 + 5x_2 - x_3, x_1 - x_2, 6x_3)$ и $\hat{B}\vec{x} = (3x_2 - 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, 2x_3)$. Показать линейность каждого оператора. Найти матрицу оператора $C = AB - BA$.

№13. Линейный оператор $\hat{C}$ в линейном пространстве V_3 состоит в последовательном применении линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ ($\hat{C} = \hat{B}\hat{A}$). Найти матрицу оператора $\hat{C}$ в каноническом базисе пространства V_3, если известно, что $\hat{A}$ - проектирование на плоскость XOY, $\hat{B}$ - отражение относительно оси OY. Обратим ли оператор $\hat{C}$?

№14. Задана квадратичная форма
$\varphi(\bar{x}) = x_1^2 + ax_2^2 + (a+1)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2ax_2x_3$. При каких значениях a квадратичная форма будет положительно определена?

№15. Задано уравнение кривой второго порядка $4x^2+13y^2+12xy+12x+10y-3=0$. Привести данное уравнение к каноническому виду методом ортогональных преобразований. Определить тип кривой, сделать чертеж.

№16. Матрица Грама в базисе $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ имеет вид $G=\begin{pmatrix}8&1&3\\1&4&-1\\3&-1&5\end{pmatrix}$.

Найти длины базисных векторов и углы между ними. Найти угол между векторами $\vec{x}=(1,-2,-4)$ и $\vec{y}=(3,1,-1)$. Ортогонализовать базис $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

Часть 2
Типовой расчет

Решение задач типового расчета позволяет студенту успешно подготовиться к выполнению контрольных работ и сдаче экзамена (зачета). В *контрольную работу №1* входят задачи, аналогичные *задачам 2.1-2.10*. В *контрольную работу №2* входят задачи, аналогичные *задачам 2. 12-2.14*.

Выполнение типового расчета является необходимым условием допуска студента на экзамен или зачет.

Задачи по теме «Линейные пространства»

Задача 2.1. Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ заданы своими координатами в каноническом базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ линейного пространства V_3. Показать, что векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют базис пространства V_3. Найти разложение вектора $\bar{d}$ по этому базису. Сделать проверку.

№ варианта	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$
1	(1,2,3)	(-2,0,1)	(-3,2,0)	(-2,0,6)

2	(-1,2,3)	(-2,0,1)	(-3,2,0)	(-4,0,6)
3	(1,2,3)	(2,0,1)	(-3,2,0)	(2,0,6)
4	(2,1,3)	(2,0,1)	(-3,2,0)	(-2,2,3)
5	(3,-2,4)	(0,-3,5)	(7,1,0)	(1,-1,2)
6	(2,1,3)	(1,0,-2)	(-3,2,0)	(7,0,6)
7	(4,-5,7)	(1,0,-2)	(2,-1,0)	(-5,1,1)
8	(2,1,3)	(1,0,-2)	(1,2,-3)	(3,4,-8)
9	(-3,1,0)	(4,3,-1)	(1,1,0)	(-9,4,1)
10	(2,1,3)	(1,0,-2)	(-1,0,3)	(9,2,-5)
11	(2,1,-1)	(1,0,-2)	(-1,2,3)	(9,-7,-19)
12	(2,1,3)	(1,0,-2)	(-1,2,3)	(3,-2,-7)
13	(1,2,3)	(2,0,1)	(-3,2,0)	(-11,10,5)
14	(1,2,3)	(-2,0,1)	(-3,2,0)	(-4,-8,-7)
15	(2,1,3)	(-1,0,2)	(-3,2,0)	(-4,5,3)
16	(3,-2,4)	(0,-3,5)	(7,1,0)	(1,-4,7)
17	(2,1,3)	(1,0,-2)	(-1,2,3)	(3,-2,-7)
18	(2,1,3)	(1,0,-2)	(-1,0,3)	(2,1,4)
19	(-3,1,0)	(4,3,-1)	(1,1,0)	(-5,4,1)
20	(2,1,-1)	(1,0,-2)	(-1,2,3)	(0,3,-1)
21	(4,-5,7)	(1,0,-2)	(2,-1,0)	(-3,4,-10)

22	(2,1,3)	(1,0,-2)	(-3,2,0)	(9,4,10)
23	(1,2,3)	(-2,0,1)	(-3,2,0)	(8,8,10)
24	(6,0,-2)	(1,1,-1)	(0,-3,4)	(4,-11,12)
25	(2,1,-1)	(1,0,-2)	(-1,2,3)	(2,3,5)
26	(-1,2,3)	(-2,0,1)	(-3,2,0)	(-1,10,5)
27	(6,0,-2)	(1,1,-1)	(0,-3,4)	(5,-7,11)
28	(4,-5,7)	(1,0,-2)	(2,-1,0)	(7,-5,1)
29	(3,-2,4)	(0,-3,5)	(7,1,0)	(-5,-8,12)
30	(-3,1,0)	(4,3,-1)	(1,1,0)	(8,-2,-2)

Задача 2.2. Является ли множество $L = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ векторов заданного вида линейным подпространством в R^3? Если да, то найти базис и размерность этого подпространства. Дополнить базис подпространства L до базиса всего пространства R^3. Выписать матрицу перехода от канонического базиса пространства R^3 к построенному базису.

№ варианта	$L = \{(x_1, x_2, x_3)\}$
1	а) $(a+b, -a+2b, a-3b)$ б) $(a+b, -a+2b, a-3)$
2	а) $(3a+b, 3+2b, a-2b)$ б) $(3a+b, 3a+2b, a-2b)$
3	а) $(2a-2, -3a+2b, 2a+b)$ б) $(2a-2b, -3a+2b, 2a+b)$
4	а) $(2a+b, a, -a+3b)$ б) $(2a+b, a, -1+3b)$

5	а) $(-3-2b,-a+2b,-a+3b)$ б) $(-3a-2b,-a+2b,-a+3b)$
6	а) $(a+b,-7b,-2a+3b)$ б) $(a+b,-7b,-2a+3)$
7	а) $(3a+2b,-a-b,2a+4b)$ б) $(3a+2b,-a-b,2a+4)$
8	а) $(-a-1,-3a+b,2a-b)$ б) $(-a-b,-3a+b,2a-b)$
9	а) $(2a,3b-1,-b)$ б) $(2a,3b-a,-b)$
10	а) $(-2a-b,2a,a-3b)$ б) $(-2a-b,2a+1,a-3b)$
11	а) $(-3a-3b,-3a+2,-a-b)$ б) $(-3a-3b,-3a+2b,-a-b)$
12	а) $(3a+b,a-3b,a-2b)$ б) $(3a+1,a-3b,a-2b)$
13	а) $(2a-3b,-2a+b,-1-3b)$ б) $(2a-3b,-2a+b,-a-3b)$
14	а) $(3a-3b,-b,-2a+5b)$ б) $(3a-3b,-b,-2a+5)$
15	а) $(2a+b,-2-2b,-a+b)$ б) $(2a+b,-2a-2b,-a+b)$
16	а) $(a-3b,2a+b,2a-3b)$ б) $(a-3b,2+b,2a-3b)$
17	а) $(a+b,2a-b,-2a-2b)$ б) $(a+b,2a-b,-2a-2)$

18	а) $(a-3{,}3a+5b{,}2a)$ б) $(a-3b{,}3a+5b{,}2a)$
19	а) $(-2a+5b{,}1-2b{,}-a+8b)$ б) $(-2a+5b, a-2b{,}-a+8b)$
20	а) $(a+2b{,}-a+b{,}-2a-3b)$ б) $(a+2b{,}-a+b{,}-2-3b)$
21	а) $(-a-3b, a+2{,}2a-b)$ б) $(-a-3b, a+2b{,}2a-b)$
22	а) $(a-5b{,}3a+2b{,}2a-b)$ б) $(1-5b{,}3a+2b{,}2a-b)$
23	а) $(-2a-1{,}-3a+2b, a+2b)$ б) $(-2a-b{,}-3a+2b, a+2b)$
24	а) $(-2a+2b, a+5b, a+2b)$ б) $(-2a+2b, a+5, a+2b)$
25	а) $(-3a-b{,}-2a+3b{,}3+b)$ б) $(-3a-b{,}-2a+3b{,}3a+b)$
26	а) $(-2-b, a+3b, a-7b)$ б) $(-2a-b, a+3b, a-7b)$
27	а) $(-a-5b{,}3a+4b, a+2b)$ б) $(-a-5{,}3a+4b, a+2b)$
28	а) $(3a+3b{,}3a-3b{,}2a+b)$ б) $(3a+3b{,}3a-3{,}2a+b)$
29	а) $(5a, -2a+b, a-4b)$ б) $(5a, -2a+b, a-4)$
30	а) $(-2a-5b{,}-a+2b{,}2a-7b)$ б) $(-2a-5b{,}-1+2b{,}2a-7b)$

<u>Задача 2.3</u>. Проверить, что множество многочленов $L=\{p(t)\}$ заданного вида с вещественными коэффициентами образует линейное подпространство в линейном пространстве P_2 многочленов степени не выше 2. Найти размерность и базис L, дополнить его до базиса всего пространства P_2. Найти координаты многочлена $h(t)\in L$ в базисе подпространства L.

№ варианта	$p(t)\,,a,b\in R$	$h(t)$
1	$p(t)=(-a+3b)t^2+(2a+b)t+7a$	$h(t)=-3t^2+20t+63$
2	$p(t)=-at^2+(2a+2b)t-4a$	$h(t)=-t^2-4$
3	$p(t)=(2a+4b)t^2+(-a-2b)t-3a$	$h(t)=10t^2-5t-3$
4	$p(t)=(2a-b)t^2+bt+a-3b$	$h(t)=t^2+t-2$
5	$p(t)=at^2+(a-2b)t+(4a+4b)$	$h(t)=-2t^2-4t-4$
6	$p(t)=3at^2+(2a+b)t+3a+b$	$h(t)=-3t^2+t$
7	$p(t)=(-2b+a)t^2+(-a+3b)t+2a$	$h(t)=-5t^2+6t-6$
8	$p(t)=(a-2b)t^2+3at+(4a+4b)$	$h(t)=t^2-3t-8$
9	$p(t)=(-a+b)t^2+(3a-3b)t+2b$	$h(t)=-t^2+3t+2$
10	$p(t)=2at^2+(a+4b)t-a+4b$	$h(t)=-6t^2+5t+11$
11	$p(t)=(a+3b)t^2-3at+(4a-2b)$	$h(t)=8t^2-6t+4$
12	$p(t)=(3b-a)t^2+(-a+3b)t-3a$	$h(t)=-t^2-t-12$
13	$p(t)=(-3a+b)t^2+4at+2b$	$h(t)=-3t^2+8t+6$
14	$p(t)=(2a-b)t^2+(a+3b)t-3a$	$h(t)=-3t^2-5t+6$
15	$p(t)=at^2+(-2b-2a)t+2b$	$h(t)=3t^2-6$

16	$p(t)=4bt^2+(2a-4b)t+(-4a-b)$	$h(t)=4t^2+4t-17$
17	$p(t)=4bt^2+3bt+(-2a+b)$	$h(t)=8t^2+6t-8$
18	$p(t)=(4b+2a)t^2+(-2b+3a)t-a$	$h(t)=8t^2+4t-2$
19	$p(t)=(a-2b)t^2-3at-3b$	$h(t)=t^2-9t-3$
20	$p(t)=(3b+a)t^2+(-2a-b)t+a$	$h(t)=9t^2-8t+3$
21	$p(t)=2bt^2+(3a+2b)t+(a+3b)$	$h(t)=-2t^2+7t$
22	$p(t)=(-a+b)t^2+(2a-2b)t+a$	$h(t)=2t^2-4t+1$
23	$p(t)=(a+b)t^2+3at+(-3a-2b)$	$h(t)=4t^2+6t-10$
24	$p(t)=(2b+2a)t^2-at+(2a-3b)$	$h(t)=-6t^2+2t-1$
25	$p(t)=-2bt^2+4at+(4a-3b)$	$h(t)=-2t^2-4t-7$
26	$p(t)=(2a-2b)t^2+bt+4a$	$h(t)=-2t^2+2t+4$
27	$p(t)=(-2a+b)t^2+4at+(2a-b)$	$h(t)=t^2+4t-1$
28	$p(t)=(a-b)t^2-at+(-a+2b)$	$h(t)=3t^2-5t-1$
29	$p(t)=(-a+b)t^2-2bt+3a$	$h(t)=3t^2-8t+3$
30	$p(t)=-2at^2+(-2a+3b)t+4b$	$h(t)=-2t^2-11t-12$

Задача 2.4. Доказать, что множество М матриц заданного вида является линейным подпространством в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка M_{2x2}. Построить базис и найти размерность подпространства М.

№ варианта	M
1	$M=\left\{\begin{pmatrix} 4a-2b & 0 \\ -3a+3b & 2a \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$

2	$M=\left\{\begin{pmatrix} -4a+3b & -a+3b \\ 0 & 2a-2b \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
3	$M=\left\{\begin{pmatrix} 2a+3b & -4a+2b \\ a-4b & 2a \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
4	$M=\left\{\begin{pmatrix} -3a+2c & -3a-b \\ c & 2b-3c \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
5	$M=\left\{\begin{pmatrix} a+2b & b+3c \\ 2c & 0 \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
6	$M=\left\{\begin{pmatrix} a-3b & a+b \\ b & -3a-2b \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
7	$M=\left\{\begin{pmatrix} 5b-c & -a \\ 2a+b+c & 3c \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
8	$M=\left\{\begin{pmatrix} -a-2c & 2b+c \\ 2b-3c & b+2c \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
9	$M=\left\{\begin{pmatrix} -a+3b & -2a+3b \\ -3a-3b & -a+b \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
10	$M=\left\{\begin{pmatrix} -a-b & 2a-b \\ -3a-2b & -2a-3b \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
11	$M=\left\{\begin{pmatrix} -a+c & 0 \\ b-2c & 2b-c \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
12	$M=\left\{\begin{pmatrix} -b+2c & 3a+3b \\ -a-b+c & 3a-c \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
13	$M=\left\{\begin{pmatrix} 2a-c & -c \\ b & -2a-2c \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$

14	$M=\left\{\begin{pmatrix}-2a-b & -a\\ 3a-b & -a+b\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
15	$M=\left\{\begin{pmatrix}2a+b & -3b-3c\\ -2c & b\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
16	$M=\left\{\begin{pmatrix}-3a+c & -2a-3b\\ b+c & 0\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
17	$M=\left\{\begin{pmatrix}a & 2a+4b\\ 3a+4b & -a-b\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
18	$M=\left\{\begin{pmatrix}2c & 3a-3b\\ 3a-2c & 4b+3c\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
19	$M=\left\{\begin{pmatrix}-3a & -2a+2b\\ -a+2b & -a+3b\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
20	$M=\left\{\begin{pmatrix}-3b & 2a\\ -a+b & a+2b\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
21	$M=\left\{\begin{pmatrix}2b & a+3b\\ 5a-2b & a-3b\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
22	$M=\left\{\begin{pmatrix}a+4b & -a-b\\ -2a-2b & 2a+4b\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
23	$M=\left\{\begin{pmatrix}3a-3c & -3a\\ -4b & 2b+c\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
24	$M=\left\{\begin{pmatrix}2a-b & a+b\\ a-b & 0\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
25	$M=\left\{\begin{pmatrix}a & -3b\\ a-b & -2a+2b\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$

26	$M=\left\{\begin{pmatrix} 3a-3b & -b \\ a & 2a+3b \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
27	$M=\left\{\begin{pmatrix} 2a+2b & 2a+3b \\ -2a & -2a-2b \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
28	$M=\left\{\begin{pmatrix} -3a+b & 0 \\ -a-3b & a+3b \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
29	$M=\left\{\begin{pmatrix} b & a-2b \\ -a+b & -2a \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$
30	$M=\left\{\begin{pmatrix} -a-3b & -2a-b \\ 3a+b & -2a \end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$

Задачи по теме «Линейные операторы»

<u>Задача 2.5</u>. Линейный оператор $\hat{A}$ в базисе $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ задан матрицей A. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3})$.

№ варианта	***A***	$(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$
1	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1= -\vec{e}_1+\vec{e}_3$ $\vec{f}_2= 2\vec{e}_2+\vec{e}_3$ $\vec{f}_3=\vec{e}_1-\vec{e}_2$
2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1= \vec{e}_1-\vec{e}_3$ $\vec{f}_2= 2\vec{e}_1-\vec{e}_2$ $\vec{f}_3=-2\vec{e}_2+\vec{e}_3$
3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1= -\vec{e}_1+\vec{e}_3$ $\vec{f}_2= 2\vec{e}_2+\vec{e}_3$ $\vec{f}_3= \vec{e}_1-\vec{e}_2$

4	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$
5	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$
8	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = \vec{e}_2$
9	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$
10	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
11	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = \vec{e}_2$
12	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$

		$\vec{f}_3= \vec{e}_1+3\,\vec{e}_2$
13	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1= 3\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_2= -\overrightarrow{e}_1- \vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_3= \vec{e}_1- \vec{e}_3$
14	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1= -2\,\vec{e}_1+ \vec{e}_2$ $\vec{f}_2= \vec{e}_1 - \vec{e}_3$ $\vec{f}_3= - \vec{e}_1+2\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
15	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1= - \vec{e}_1- 2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_2= \vec{e}_1- \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_3=2\,\vec{e}_1+ \vec{e}_3$
16	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1= 3\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_2= - \vec{e}_1- \vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_3= \vec{e}_1+3\,\vec{e}_2$
17	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1= \vec{e}_1+ \vec{e}_2 -2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_2=2\,\vec{e}_1+ \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ $\vec{f}_3= \vec{e}_2$
18	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1= 3\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_2= - \vec{e}_1- \vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_3= \vec{e}_1- \vec{e}_3$
19	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1= \vec{e}_1+ \vec{e}_2 -2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_2= 2\,\vec{e}_1+ \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ $\vec{f}_3= \vec{e}_2$
20	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1= - \vec{e}_1-2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_2= \vec{e}_1- \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_3= 2\,\vec{e}_1+ \vec{e}_3$

21	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = -2\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = -\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
22	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = 3\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = -\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_2$
23	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = 2\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = \vec{e}_2$
24	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = -2\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = -\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
25	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = 3\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = -\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$
26	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = 3\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = -\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_2$
27	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = -\,\vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = 2\,\vec{e}_1 + \vec{e}_3$
28	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\,\vec{e}_3$ $\vec{f}_2 = 2\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ $\vec{f}_3 = \vec{e}_2$
29	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1 = -\,2\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$

		$\vec{f}_3$= - $\vec{e}_1$+2 $\vec{e}_2$ + $\vec{e}_3$
30	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{f}_1$= 3 $\vec{e}_2$ + $\vec{e}_3$ $\vec{f}_2$= - $\vec{e}_1$- $\vec{e}_2$ + 2 $\vec{e}_3$ $\vec{f}_3$= $\vec{e}_1$- $\vec{e}_3$

<u>Задача 2.6</u>. Оператор $\hat{A}$ действует в пространстве R^3, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$. Проверить, является ли оператор $\hat{A}$ линейным. В случае линейности записать матрицу оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства R^3.

№ варианта	$\hat{A}$
1	а) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_1+x_2+x_3,x_1+x_2 ,x_1-2x_3) б) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_1+x_2+3,x_1-4x_2+x_3 ,$-4x_1-x_3$)
2	а) $\widehat{A}\vec{x}$=($-6x_2$+x_3, x_1+x_2-1 , $6x_2$+x_3) б) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_1,x_1+x_2,$x_1-x_2-x_3$)
3	а) $\widehat{A}\vec{x}$=($x_1^2+2x_2$+x_3,x_1 ,x_1+2x_2+$3x_3$) б) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_1-2x_2+x_3,x_1+2x_2+x_3 ,x_1+$3x_3$)
4	а) $\widehat{A}\vec{x}$=($2x_1+3x_2$+x_3,x_1+4x_2+x_3 , $4x_1$) б) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_1-3x_2,x_2-x_3 ,x_1+2)
5	а) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_1-2x_2+$4x_3$,x_2+$3x_3$,$-x_1+x_3$) б) $\widehat{A}\vec{x}$=($4x_1+x_2$+$3x_3$,x_1-2x_2+x_3 ,$7x_1+7$)
6	а) $\widehat{A}\vec{x}$=($2x_2$+x_3,x_1-3 ,$x_1+2x_2-4x_3$) б) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_1+2x_2,x_1-3x_2+x_3 ,$3x_1+x_2-2x_3$)
7	а) $\widehat{A}\vec{x}$=($5x_1+x_2$+x_3,x_1 ,x_3) б) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_1+x_2-$3x_3$, 7 ,x_1+2x_2)
8	а) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_3,x_2+x_3 ,x_3^3) б) $\widehat{A}\vec{x}$=($-x_1$+x_3,x_1-x_2+$3x_3$,x_1+2x_2+x_3)
9	а) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_1+6x_2+$3x_3$,x_1-x_2 ,x_1+7x_2+$0.5x_3$) б) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_1-5x_2+$2x_3$,x_1+x_3 , 9)

10	а) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+4x_2+x_3, 3x_1+2x_2+x_3, x_1)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1-4x_2+x_3, 3x_1-2x_2+x_3, 1)$
11	а) $\widehat{A}\vec{x}=(-3x_2+x_3, x_1+x_3, x_1+3x_2+x_3)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+2x_2+x_3, x_1+2x_2+x_3+1, x_1)$
12	а) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1-5x_2+x_3, 5, x_1+5x_2+x_3)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1, x_1+x_2, -x_3)$
13	а) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+3x_2+x_3, x_1+2x_2+x_3, 4x_1+4)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(4x_1+x_2, x_1+x_3, x_1-4x_2+3x_3)$
14	а) $\widehat{A}\vec{x}=(-x_3, x_1+4x_2+x_3, x_3)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+3, x_1+2x_2, 3x_1+5x_2+x_3)$
15	а) $\widehat{A}\vec{x}=(5x_1+x_2+x_3, 3x_1+x_2+2x_3, x_1+x_2+7)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+5x_2+x_3, 3x_1+x_2-2x_3, 7x_1+x_2+x_3)$
16	а) $\widehat{A}\vec{x}=(0, x_1+2x_2+x_3, -x_1+x_2+x_3)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1-3x_2+x_3, x_1+x_3, x_1+5x_2+3)$
17	а) $\widehat{A}\vec{x}=(4x_1+x_2+x_3, x_1+3x_2+x_3, x_3)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+x_2^2+x_3, x_1+3x_2+x_3, x_1)$
18	а) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1-2x_2+x_3, x_1+2x_2+x_3, x_1+5x_2+x_3)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+x_2+3x_3, x_1, x_1+2x_2+2)$
19	а) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+x_2+x_3, 5, x_1+x_2+x_3)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+x_2, x_1+3x_2+x_3, x_1-3x_2+x_3)$
20	а)$\widehat{A}\vec{x}=(-3x_1+x_2+x_3, 4x_1+x_2+x_3, 5x_1+5x_2-5)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+2x_2+x_3, x_1+4x_2+x_3, 4x_2+4x_3)$
21	а) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+3x_2+2x_3, x_1, 7)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(2x_1+x_2+x_3, x_1-5x_3, x_1+7x_2-7x_3)$
22	а) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+x_2+3x_3, x_1+2x_2+x_3, 3)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_3, x_1, x_1+5x_2+6x_3)$
23	а) $\widehat{A}\vec{x}=(3x_1+x_2+x_3, -2x_1+x_3, x_1+x_3)$ б) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1+5x_2+x_3, x_1+x_2, x_1+x_2+2)$

24	а) $\widehat{A}\vec{x}$=($x_1^2 + 2x_2$+x_3,$x_1 + x_2$+$3x_3$, x_3) б) $\widehat{A}\vec{x}$=($x_1 + x_2$,$x_1 + x_2$+$3x_3$,x_2+x_3)
25	а) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_1+x_3,$x_1 + x_2$,$-3x_3$) б) $\widehat{A}\vec{x}$=($x_1 + 8x_2$+x_3,-3 ,$x_1 + 2x_2$+x_3)
26	а) $\widehat{A}\vec{x}$=($x_1 + 2x_2$+x_3,x_1x_3 ,$x_1 + 4x_2$+x_3) б) $\widehat{A}\vec{x}$=(x_3,$x_1 - 2x_2$+x_3 ,$x_1 + 3x_2$+x_3)
27	а) $\widehat{A}\vec{x}$=($x_1 + 1$,$x_1 + x_2$+$3x_3$,$x_1 + x_2$+$4x_3$) б) $\widehat{A}\vec{x}$=($x_1 + 3x_2$+x_3,$x_1 + 2x_2$+x_3 ,$x_1 - 4x_2$+x_3)
28	а) $\widehat{A}\vec{x}$=(2,$x_1 + 4x_2$+x_3 ,$x_1 + 3x_2$+x_3) б) $\widehat{A}\vec{x}$=($x_1 - 2x_2$+x_3,$x_1 - 3x_2$+x_3 ,$x_1 - 4x_2$+x_3)
29	а) $\widehat{A}\vec{x}$=($x_1 + 3$,$x_1 + 2x_2$+x_3 ,$x_1 + 3x_2$+x_3) б) $\widehat{A}\vec{x}$=($x_1 - 3x_2$+x_3,x_1,$x_1 + x_2$+$3x_3$)
30	а) $\widehat{A}\vec{x}$=($x_1 + 2x_2$+x_3,$x_1 - 2x_2$+x_3 ,$x_1 + x_2$+$2x_3$) б) $\widehat{A}\vec{x}$=(2,$x_1 + x_2$+x_3 ,$x_1 + 3x_2$)

Задача 2.7. Для линейного оператора $\hat{A}$ из ***задачи 2.6*** определить, является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Если да, то найти матрицу обратного оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства R^3, сделать проверку. Найти образ вектора $\vec{x}$=(-1,2 ,3). Найти ядро линейного оператора $\hat{A}$. Является ли вектор $\vec{x} = (0,1,0)$ собственным вектором оператора $\hat{A}$?

Задача 2.8. Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного матрицей А . Является ли линейный оператор $\hat{A}$ оператором простого типа? Если является, то записать матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе из собственных векторов.

№ варианта	А	№ варианта	А

1	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

9	$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 3 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Задача 2.9. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор в пространстве V_3.

a) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

b) Найти образ вектора $\vec{a}$**.**

c) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$**.**

d) Является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Если да, описать его действие.

е) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

№ варианта	$\hat{A}$	$\vec{a}$
1	Поворот вокруг оси OX на $180°$	(1, 0, 2)
2	Отражение относительно плоскости YOZ	(-1, 1, 0)
3	Гомотетия с коэффициентом $\kappa = 2$	(0, -1, 2)
4	Проекция на плоскость XOY	(-2, 0, 1)
5	Поворот вокруг оси OY на $90°$ против часовой стрелки	(0, 1, 3)
6	Отражение относительно оси OZ	(-1, 2, 0)
7	Гомотетия с коэффициентом $\kappa = 0{,}5$	(3, 0, 2)
8	Проекция на ось OY	(-1, 4, 1)
9	Поворот вокруг оси OZ на $90°$ по часовой стрелке	(-2, 0, 2)
10	Отражение относительно плоскости XOY	(0, -2, 3)
11	Гомотетия с коэффициентом $\kappa = -2$	(1, 2, 3)
12	Проекция на плоскость XOZ	(-1, 3, 1)
13	Поворот вокруг оси OY на $180°$	(3, 0, 2)
14	Отражение относительно оси OY	(-2, 3, 1)
15	Гомотетия с коэффициентом $\kappa =-0{,}5$	(0, 1, 3)
16	Проекция на ось OZ	(-1,0, -2)
17	Поворот вокруг оси OX на $90°$ по часовой стрелке	(3, -1, 2)
18	Отражение относительно плоскости XOZ	(1, -1, 4)

19	Гомотетия с коэффициентом $\kappa = 3$	(-2, 0, 2)
20	Проекция на плоскость YOZ	(0, 1, -2)
21	Поворот вокруг оси OZ на 180°	(1, 2, -3)
22	Отражение относительно оси OX	(-1, 2, 1)
23	Гомотетия с коэффициентом $\kappa = -3$	(0, 1, 2)
24	Проекция на ось OX	(-2, 1, 0)
25	Поворот вокруг оси OX на 90° против часовой стрелки	(1, -1, 3)
26	Гомотетия с коэффициентом $\kappa = 5$	(-1, 0, 2)
27	Гомотетия с коэффициентом $\kappa = -5$	(3, -1, 2)
28	Поворот вокруг оси OZ на 90° против часовой стрелки	(1, 0, 4)
29	Гомотетия с коэффициентом $\kappa = -1$	(-2, 2, 1)
30	Поворот вокруг оси OY на 90° по часовой стрелке	(0, -2, 1)

Задача 2.10. В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 задан оператор $\hat{A}$.

a) Показать линейность оператора $\hat{A}$.

b) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства P_2.

c) Найти образ многочлена $p(t)$.

d) Найти ядро линейного оператора $\hat{A}$.

e) Существует ли обратный оператор?

№ Варианта	$\hat{A}(p)(t)$	$p(t)$
1	$tp'(t)-2p(t)$	$3t^2-5t+1$
2	$(t^2p(t))''$	$2t^2+7t-3$

3	$(tp(t))''-2p(t))$	t^2-4
4	$(tp(t))'-3p(t)$	$4t^2-2t+3$
5	$2p(t)- t^2p''(t)$	$3t-t^2$
6	$p'(t)-2p(t)$	t^2-5t-4
7	$t^2p'(t)-2tp(t)$	t^2-2t+4
8	$2p'(t)-p(t)$	$2t^2+3t$
9	$2p(t)-2tp'(t)$	$3t^2-1$
10	$(t+1)p''(t)$	$4t^2+5t$
11	$(tp(t))'-p(t)$	$4t+7$
12	$(t^2p(t))''-6p(t)$	$3t-t^2$
13	$t^2p''(t)-p(t)$	$4t^2-3t$
14	$2(tp(t))'-6p(t)$	$2t^2-5t+3$
15	$p(t)-tp'(t)$	$2t^2+3t$
16	$p'(t)-2p(t)$	t^2-3t-6
17	$(t^2 -1)p''(t)$	$3t^2+4t+5$
18	$tp''(t)-p(t)$	$7t-5$
19	$2tp'(t)-4p(t)$	$3t^2-5t$
20	$(tp(t))''$	$2t^2-5$
21	$(t-1)p'(t)$	t^2+2t+3
22	$(t^2p(t))''+p(t)$	$-2t^2-3t$
23	$3tp'(t) + p(t)$	$2t^2-t+1$
24	$(tp(t))'-p(t)$	t^2-6t-2
25	$(t-2)p'(t)$	$3t^2+5$
26	$p'(t)+3p(t)$	$5t^2-2t+3$
27	$t^2p''(t)'-2p(t)$	$3t^2-t+2$
28	$(t+3)p'(t)$	$2t+3$
29	$2tp'(t)-4p(t)$	$5t^2-t+1$
30	$p(t)-2p'(t)$	$-t^2+5$

<u>Задача 2.11</u>.* Оператор $\hat{A}$ действует в пространстве P_2 многочленов степени не выше 2.

a) Показать линейность оператора $\hat{A}$.

b) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства P_2.

c) Найти образ многочлена $p(t)$.

d) Найти ядро линейного оператора $\hat{A}$.

e) Существует ли обратный оператор?

(Задача не является обязательной. Вводится в типовой расчет по указанию преподавателя).

№ варианта	$\hat{A}(p(t))$	$p(t)$
1	$t(p(t+1)-p(t))$	$-t^2-3t+10$
2	$tp'(t-1)-p(t)$	$-3t^2+2t+6$
3	$(t^2p(t-1))''$	$2t^2-8t$
4	$2p(t)-p(t+1)$	$-t^2+6t+3$
5	$2tp'(t)-4p(t-1)$	$5t^2+2$
6	$tp'(t+2)$	$3t^2-5t+1$
7	$tp'(t+1)-2p(t)$	$3t^2-2t+4$
8	$(t^2p(t+1))''$	$-2t^2-t+7$
9	$t(p(t-2)-p(t))$	$4t^2+3t+2$
10	$tp'(t)-2p(t-1)$	$-3t^2-2t+1$
11	$(t^2p(t-2))''$	$5t^2+2t+3$
12	$p(t)-2p(t+1)$	$-7t^2+2$
13	$2tp'(t)-4p(t+1)$	$3t^2-3t+4$
14	$(tp(t+2))'$	$-t^2-8t-2$

15	$tp'(t)-2p(t-1)$	$2t^2+t+9$
16	$t(p(t-1)-p(t))$	$3t^2+4t-7$
17	$tp'(t-2)$	$4t^2+t-5$
18	$(t^2p(t))''-2p(t+1)$	$-3t^2-7t+2$
19	$p(t)-2p(t-1)$	$8t^2+5t-3$
20	$2tp'(t)-p(t+1)$	t^2-2t+9
21	$tp'(t-2)$	$3t^2-5$

Задачи по теме «Квадратичные формы. Евклидово пространство»

Задача 2.12. Задана квадратичная форма $\varphi(\bar{x})$.

а) Привести $\varphi(\bar{x})$ к каноническому виду методом Лагранжа, выписать преобразование координат.

б) Найти положительный и отрицательный индексы, ранг квадратичной формы $\varphi(\bar{x})$.

в) Исследовать $\varphi(\bar{x})$ на знакоопределенность двумя способами: по каноническому виду и по критерию Сильвестра.

№ варианта	$\varphi(\bar{x})$
1	$x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$
2	$2x_1^2+4x_2^2+10x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3$
3	$x_1^2+5x_2^2+11x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
4	$x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$
5	$4x_1^2+5x_2^2+9x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+14\,x_2x_3$

6	$4x_1^2+2x_2^2+10x_3^2-4x_1x_2-12x_1x_3-8\,x_2x_3$
7	$x_1^2-3x_2^2-8x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-10\,x_2x_3$
8	$13x_1^2+x_2^2+x_3^2+6x_1x_2-4x_1x_3$
9	$4x_1^2-3x_2^2-9x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-10\,x_2x_3$
10	$4x_1^2+8x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3-4x_2x_3$
11	$x_1^2+3x_2^2-7x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-10x_2x_3$
12	$9x_1^2+3x_2^2-8x_3^2-12x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$
13	$-x_1^2-2x_2^2-4x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3$
14	$x_1^2-4x_1x_2-2x_1x_3$
15	$x_1^2+8x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-8x_2x_3$
16	$8x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$
17	$-5x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3$
18	$-13x_1^2-x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3$
19	$x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3$
20	$4x_1^2+12x_2^2+x_3^2+6x_1x_2+2x_2x_3$
21	$4x_1^2+3x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2-12x_1x_3+10x_2x_3$
22	$x_1^2+8x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-8x_2x_3$
23	$2x_1^2+4x_2^2+12x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3$
24	$x_1^2+5x_2^2+8x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
25	$x_1^2+2x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$

26	$4x_1^2+5x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$
27	$-x_1^2-2x_2^2-2x_1x_2-2x_1x_3$
28	$x_1^2-x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3+8x_2x_3$
29	$x_1^2-11x_2^2-10x_1x_2-2x_1x_3+26x_2x_3$
30	$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

Задача 2.13. Дана матрица Грама скалярного произведения G в базисе $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$. Найти:

– длины базисных векторов $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$;

– угол между базисными векторами $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$;

– длины заданных векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$;

– угол между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

Ортогонализовать базис $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

№ варианта	G	$\bar{x}$, $\bar{y}$	№ варианта	G	$\bar{x}$, $\bar{y}$
1	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	(1,2) (-1,1)	2	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	(1,2) (-1,1)
3	$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	(1,2) (-1,1)	4	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$	(1,2) (-1,1)
5	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	(1,2) (-1,1)	6	$\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	(1,2) (-1,1)
7	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	(1,2) (-1,1)	8	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$	(1,2) (-1,1)
9	$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	(1,2) (-1,1)	10	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	(1,2) (-1,1)

11	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	(-3,1) (1,-2)	12	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	(-3,1) (1,-2)
13	$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	(-3,1) (1,-2)	14	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$	(-3,1) (1,-2)
15	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	(-3,1) (1,-2)	16	$\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	(-3,1) (1,-2)
17	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	(-3,1) (1,-2)	18	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$	(-3,1) (1,-2)
19	$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	(-3,1) (1,-2)	20	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	(-3,1) (1,-2)
21	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	(3,-1) (1,2)	22	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	(3,-1) (1,2)
23	$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	(3,-1) (1,2)	24	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$	(3,-1) (1,2)
25	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	(3,-1) (1,2)	26	$\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	(3,-1) (1,2)
27	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	(3,-1) (1,2)	28	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$	(3,-1) (1,2)
29	$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	(3,-1) (1,2)	30	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	(3,-1) (1,2)

Задача 2.14. Дана матрица G квадратичной формы $\varphi(\bar{x})$ в базисе $S=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$.

a) Показать, что матрица G является матрицей Грама.

b) Найти длины базисных векторов и углы между ними.

c) Найти длины векторов $\bar{x}$ =(1,2, 3) и $\bar{y}$ =(2,-1,2) и угол между ними.

d) Найти матрицу Грама квадратичной формы $\varphi(\bar{x})$ в базисе $S_1=\{\bar{f}_1,\bar{f}_2,\bar{f}_3\}$.

№ варианта	G	$\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$
1	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
2	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ $\bar{f}_2 = 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$ $\bar{f}_3 = 4\bar{e}_3$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 12 & 2 \\ -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
4	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
5	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
6	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ $\bar{f}_2 = 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$ $\bar{f}_3 = 4\bar{e}_3$
7	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
8	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ $\bar{f}_3 = -\bar{e}_2 + \bar{e}_3$
9	$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$

10	$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$	$\bar{f}_1=\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3$ $\bar{f}_2=2\bar{e}_2+3\bar{e}_3$ $\bar{f}_3=4\bar{e}_3$
11	$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$	$\bar{f}_1=\bar{e}_1$ $\bar{f}_2=\bar{e}_1+\bar{e}_2$ $\bar{f}_3=\bar{e}_2+\bar{e}_3$
12	$\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$	$\bar{f}_1=\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3$ $\bar{f}_2=2\bar{e}_2+3\bar{e}_3$ $\bar{f}_3=4\bar{e}_3$
13	$\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix}$	$\bar{f}_1=\bar{e}_1+\bar{e}_2$ $\bar{f}_2=\bar{e}_1+\bar{e}_3$ $\bar{f}_3=\bar{e}_2+\bar{e}_3$
14	$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 4 & -4\\ 1 & -4 & 5\end{pmatrix}$	$\bar{f}_1=\bar{e}_1$ $\bar{f}_2=-\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3$ $\bar{f}_3=-\bar{e}_2+\bar{e}_3$
15	$\begin{pmatrix}6 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -2\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix}$	$\bar{f}_1=\bar{e}_1$ $\bar{f}_2=\bar{e}_1+\bar{e}_2$ $\bar{f}_3=\bar{e}_2+\bar{e}_3$
16	$\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$	$\bar{f}_1=\bar{e}_1$ $\bar{f}_2=-\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3$ $\bar{f}_3=-\bar{e}_2+\bar{e}_3$
17	$\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$	$\bar{f}_1=\bar{e}_1$ $\bar{f}_2=\bar{e}_1+\bar{e}_2$ $\bar{f}_3=\bar{e}_2+\bar{e}_3$
18	$\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\\ -2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$	$\bar{f}_1=\bar{e}_1+\bar{e}_2$ $\bar{f}_2=\bar{e}_1+\bar{e}_3$ $\bar{f}_3=\bar{e}_2+\bar{e}_3$
19	$\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ -3 & 12 & -2\\ 1 & -2 & 10\end{pmatrix}$	$\bar{f}_1=\bar{e}_1$ $\bar{f}_2=\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3$

		$\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
20	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
21	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
22	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ $\bar{f}_2 = 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$ $\bar{f}_3 = 4\bar{e}_3$
23	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
24	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ $\bar{f}_3 = -\bar{e}_2 + \bar{e}_3$
25	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
26	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
27	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
28	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$

29	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = -\bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ $\bar{f}_3 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$
30	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$	$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$ $\bar{f}_2 = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ $\bar{f}_3 = -\bar{e}_2 + \bar{e}_3$

Заключение

Материал курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» (2-ой семестр) очень важен для полноценного обучения студентов инженерных специальностей и используется в дальнейшем в таких математических дисциплинах, как математический анализ (2, 3, 4 семестры), теория дифференциальных уравнений, математическая физика, теория случайных процессов. На базе этого курса решаются задачи специальных дисциплин (например, задачи квантовой физики, экономики) и многие прикладные задачи.

В пособии использованы задачи, изложенные в изданиях из списка литературы.

Список литературы

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2015. 448 с.
2. Булах Е.Э., Гущина Е.Н., Кузнецова Е.Ю., Морозова Т.А, Малыгина О.А, Немировская-Дутчак О.Э., Новикова А.И., Таланова Л.И. Алгебра и геометрия. 1-ой семестр. Учебно-методическое пособие . М.: МГТУ МИРЭА, 2018. 84 с.
3. Канатников А.Н. Крищенко А.П. Линейная алгебра. М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2015. 336 с. (электронное издание)

Дополнительная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Линейная алгебра, М: Физматлит, 2014. 280 с.
2. Краснов М.Л., Кисилев А.И.и др., Вся высшая математика., т. 1, М: URSS, 2014. 366с.

3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М: Наука, 1968. 431с.
4. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Том I. М.: Планета знаний, 2007. 469 с.
5. Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике для ВТУЗОВ, том 1. М.: Издательство физико-математической литературы, 2003. 288 с.
6. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Том II. М.: Планета знаний, 2009. 456 с.
7. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. ч.1. Минск.: Высшая школа, 2013. 304с
8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. Спб: Лань, 2010. 480 с.
9. Сборник задач по высшей математике для экономистов/под ред. П.С. Геворкяна/. М.: ЗАО «Издательство Экономика», 2010. 384 с.
10. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2002. 252 с.

Сведения об авторах

Кузнецова Екатерина Юрьевна, старший преподаватель кафедры высшей математики-2 Физико-технологического института, Российский технологический университет (МИРЭА).

Морозова Татьяна Анатольевна, старший преподаватель кафедры высшей математики-2 Физико-технологического института, Российский технологический университет (МИРЭА).

Малыгина Ольга Анатольевна, к.п.н., доцент, доцент кафедры высшей математики-2 Физико-технологического института, Российский технологический университет (МИРЭА).

Пронина Елена Владиславовна, к.ф-м.н, доцент, доцент кафедры высшей математики-2, Российский технологический университет(МИРЭА).

Параскевопуло Ольга Ригасовна , к.ф-м.н, -, доцент кафедры высшей математики-2, Российский технологический университет (МИРЭА)

Таланова Людмила Ивановна, старший преподаватель кафедры высшей математики-2 Физико-технологического института, Российский технологический университет (МИРЭА).