В экзаменационном тесте будет 15 заданий.

Понятие предела

Определение

Число A называется пределом функции *f(x)* при $x \to a$, если для любого числа ε>0 существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

На языке «кванторов» (обозначений) *опр.1* можно записать в виде:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

2 задания на определение предела: написать приведенный предел при помощи ε, δ и обратное задание – дано определение при помощи ε, δ, написать предел.

1) $\lim_{x\to 7} f(x)=+\infty$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - 7| < \delta\ f(x) > \varepsilon$

2) Выберите запись предела, определение которого дано ниже

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - 8| < \delta\ f(x) > \varepsilon$

$\lim_{x\to 8} f(x)=+\infty$

4 задания на вычисление пределов.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 3}{2x^3 - 8x + 5}$ $(+\infty)$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg 4x sin 2x ctg 3x}{tg 2x cos 6x}$ $(4/3)$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-5}{x+1}\right)^{x+3} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{-6}{x+1}\right)^{x+3} =$

$\lim\limits_{x \to \infty} (\left(1 + \frac{-6}{x+1}\right)^{(x+1)/(-6)})^{(x+3)(-6)/(x+1)} = e^{-6}$

6)) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arcsin 3x arccos 3x (3^{2x} - 1)}{tg x ln(1 + 4x^2)}$ $(+\infty)$

Дополнительные задания

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+4}\right)(x + 3) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{(3x+8)(x+3)}{(x+2)(x+4)} = 3$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+2}{4}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{ctg\,2\,x\,tg^2\,5x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+4}\right)= \lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x+1})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^3(4x)\cdot arccos(7x)}{tg(3x).arcsin(7x)\cdot ln(1+2x)}= \lim_{x\to 0}\frac{(4x)^3}{3x*7x*2x}\frac{\pi}{2}=\frac{16\pi}{21}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{18}-4x^2+x}{arccos2x+\mathrm{arcsin3x}-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{\pi}{2}+\mathrm{3x}-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+sinx}{1-cos3x+\ln(1+2x)}$$

4 задания на вычисление производных

7) Найти производные следующих функций

3chx, chx/3, ch3x, ch(x/3),3chx

8) Найти производную

F(x) = $arcsin2xe^{-8x}+\frac{cos5x}{ln8x}-e^{-2}$ ответ:

$$\frac{2e^{-8x}}{\sqrt{1-4x^2}}+arcsin2xe^{-8x}(-8)+\frac{-5sin5xln8x-\frac{cos5x}{x}}{(ln8x)^2}$$

9)Найти производную

F(x)=$(5^{(x^2+1)})^{\arcsin(x+2)}$

ответ:

$$(5^{(x^2+1)})^{\arcsin(x+2)}(\frac{\ln(5^{(x^2+1)})}{\sqrt{1-(x+2)^2}}+\frac{\arcsin(x+2)}{5^{(x^2+1)}}(5^{(x^2+1)}\ln5*2x))$$

10) Найти производную y_x'

x(t)=arcctg(cos3t), y(t)=cos(arcctg3t)

ответ:

$$\frac{-\sin(arcctg3t)\,\dfrac{-3}{1+9t^2}}{\dfrac{-1}{1+(cos3t)^2}*(-3sin3t)}$$

11). Найти точки разрыва следующих функций и определить тип точки разрыва:

$F_1(x) = \begin{cases} x-7, x \geq 2 \\ x+5, x < 2 \end{cases}$

$F_2(x) = \begin{cases} -1+\frac{(x-3)^2}{2}, & x\geq 3 \\ x-4, & x<3 \end{cases}$

$F_3(x) = \frac{5(x-1)^2}{x-1} + 5$

$F_4(x) = \frac{8(x-9)}{(x-9)^2} + 6$

Если у графика функции $y=f(x)$ существует наклонная асимптота $y=kx+b$, т.е. $\exists \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} [f(x)-(kx+b)] = 0$, то

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-kx-b}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$, т.е. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$

Из $\exists \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} [f(x)-(kx+b)] = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-kx] = b$

12) Найти асимптоты функций:

$y = \frac{4x^2}{-1+x^2}$ (y=4, x=1, x=-1)

$y = \frac{2x^3}{-x-2+x^2}$ (y=2x+2, x=2, x=- 1)

13) Найти точки перегиба и интервалы выпуклости

$y = x^3 - 12x^2 + 4x + 5$

Точка перегиба x = 4, x$\in(-\infty, 4)$выпукла вверх, x$\in(4,\infty)$ выпукла вниз.

14). Определить знаки первой и второй производной в заданных точках на графике функции.

15). Найти все частные производные первого и второго порядка заданной функции в заданной точке.

u(x, y ,z)=4· $\ln(3xy - z^2) + x \cdot tg(y^3 - 2xz)$

Решение:

Аналогично предыдущему примеру, при вычислении частной производной по переменной x, переменные y и z считаем константами.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \cdot \frac{1}{3xy - z^2} \cdot 3y + 1 \cdot tg(y^3 - 2xz) + x \cdot \frac{1}{Cos^2(y^3 - 2xz)} \cdot (-2z)$$

Частная производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ вычисляется при фиксированных x и z, т.е. x=const и z=const

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4 \cdot \frac{1}{3xy - z^2} \cdot 3x + x \cdot \frac{1}{Cos^2(y^3 - 2xz)} \cdot (3y^2)$$

Частная производная $\frac{\partial u}{\partial z}$ берется при фиксированных x и y, т.е. x=const и y=const

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4 \cdot \frac{1}{3xy - z^2} \cdot (-2z) + x \cdot \frac{1}{Cos^2(y^3 - 2xz)} \cdot (-2x)$$

Вычисление вторых производных предоставляю вам.