Интегралы

Опр. Мн-во всех первообразных для $f(x)$ — неопределённые интегралы

Обознач: $\int f(x)dx$

$f(x)$ — подынтегральная ф-ция

$f(x)dx$ — подынтегр. выражение

Если $F(x)$ — первообр. для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Свойства неопределённого интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3. $\int F'(x)dx = F(x)+C$
4. $\int (af(x)+bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$, где a, b — произв. пост.
5. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, где a, b — произв. пост; $a \neq 0$

Таблица неопределённых интегралов

1. $\int 0\,dx = C$
2. $\int 1\,dx = x + C$
3. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$
9. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0, a \neq 1$
10. $\int e^x\,dx = e^x + C$

11. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C,$
$a \neq 0$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0$

15. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$

16. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg \frac{x}{2} \right| + C$

20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$

	Дифференциалы	Производные
I	$d\sin x = \cos x\,dx$	$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
II	$d\cos x = -\sin x\,dx$	$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
III	$d\,tg\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\frac{d}{dx}tg\,x = \frac{1}{\cos^2 x}$
IV	$d\,ctg\,x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$\frac{d}{dx}ctg\,x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
V	$d\sec x = tg\,x \cdot \sec x\,dx$	$\frac{d}{dx}\sec x = tg\,x \cdot \sec x$
VI	$d\,cosec\,x = -ctg\,x \cdot cosec\,x\,dx$	$\frac{d}{dx}cosec\,x = -ctg\,x \cdot cosec\,x$

	Дифференциалы	Производные
I	$d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
II	$d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
III	$d\,\mathrm{arctg}\, x = \frac{dx}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}\mathrm{arctg}\, x = \frac{1}{1+x^2}$
IV	$d\,\mathrm{arcctg}\, x = \frac{-dx}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}\mathrm{arcctg}\, x = \frac{-1}{1+x^2}$
V	$d\,\mathrm{arcsec}\, x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d}{dx}\mathrm{arcsec}\, x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
VI	$d\,\mathrm{arccosec}\, x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d}{dx}\mathrm{arccosec}\, x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Интегрирование рациональных функций

I $\frac{A}{x-a}$ II $\frac{A}{(x-a)^k}$ III $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$

IV $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, где $k=2,3,\dots$

$P_2(x)=x^2+px+q$ Не имеет действ. корней

т.е $q-\frac{p^2}{4}>0$

Дроби типа I и II:

I $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$

II $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}dx=$

$=-\frac{A}{k-1}\cdot(x-a)^{-k+1}+C=$

$=\frac{-A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$

При интегрировании III и IV типов в знаменателе выделяется полный квадрат:

$x^2+px+q=x^2+2\cdot x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=$

$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$

Т.к $q - \frac{p^2}{4} > 0$, то обозначим $q - \frac{p^2}{4} = h^2$.

Замена $t = x + \frac{p}{2}$ сводит дробь типа III к виду

$\frac{At+N}{t^2+h^2}$, а дробь типа IV к виду

$\frac{At+N}{(t^2+h^2)^k}$, где $N = B - \frac{Ap}{2}$. Тогда

для дроби III типа имеем:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \left[t = x+\frac{p}{2}\right] = \int \frac{At+N}{t^2+h^2}dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+h^2)}{t^2+h^2} + N\int \frac{dt}{t^2+h^2} = \frac{A}{2}\ln(t^2+h^2) +$$

$$+ \frac{N}{h}\operatorname{arctg}\frac{t}{h} + C = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) +$$

$$+ \frac{N}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$$

Δ для дроби IV типа:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{At+M}{(t^2+h^2)^k}dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+h^2)}{(t^2+h^2)^k} + M\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k} =$$

$$= -\frac{A}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{(t^2+h^2)^{k-1}} + M I_k$$

Для вычисление интеграла

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Получим рекуррентную формулу:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k} = \frac{1}{h^2}\int \frac{t^2+h^2-t^2}{(t^2+h^2)^k}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^{k-1}} - \frac{1}{h^2}\int t \frac{t\,dt}{(t^2+h^2)^k} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = t,\ du = dt \\ dv = \frac{t\,dt}{(t^2+h^2)^k},\ v = -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{(t^2+h^2)^{k-1}} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{h^2} I_{k-1} - \frac{1}{h^2}\left(-\frac{1 \cdot t}{2(k-1)(t^2+h^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^{k-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{1}{2(k-1)}\right) I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)h^2} \frac{t}{(t^2+h^2)^{k-1}}$$

Множителям вида $(x-a)^k$ соответствует Σ прост. дроб.

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

Мн-лем вида $(x^2+px+q)^k$:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}$$

Схема интегрирования рациональных дробей.

1. Определить тип заданной рациональной дроби (неправильная, правильная, простейшая)

2. Если дробь неправильная, то представить её в виде суммы многочлена и правильной дроби

3. Если дробь правильная, то представить её в виде суммы простейших дробей

4. Проинтегрировать полученные выражения.

Интегрирование тригонометрических функций.

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$x = 2\operatorname{arctg} t$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

1. $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, $t=\sin x$

2. $\int R(\cos x)\sin x\,dx$, $t=\cos x$

3. $\int R(tg x)\,dx$, $t=tg x$

4. $\int R(ctg x)\,dx$, $t=ctg x$

Ф-лы понижения степени.

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x)$$

$$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x)$$

$$\cos\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x)$$

Интегрирование гиперболических функций

$$sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$th x = \frac{sh x}{ch x}.$$

$$ch^2 x - sh^2 x = 1$$

$sh\,2x = 2\,sh\,x\,ch\,x$

$ch\,2x = ch^2x + sh^2x$

$$ch^2x = \frac{ch\,2x+1}{2}$$

$$sh^2x = \frac{ch\,2x-1}{2}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$R(u, v)$ – рациональная ф-ция двух переменных, если представляет собой отношение мн-нов двух переменных $P(u, v)$ и $Q(u, v)$

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ где $R(u, v)$ – рац. ф-ция, сводится к инт-лам от рац. ф-ций с помощью универсальной тригонометрической подстановки.

$t = tg\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2arctg\,t$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Частные подстановки

1. Если $R(\sin x, \cos x)$ нечётна относительно $\sin x$. т.е

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то можно использовать подстановку $t = \cos x$.

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ нечётна относительно $\cos x$, т.е

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

то $t = \sin x$

3. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,

то $t = tg\,x$.

При этом

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

1.5.5. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Пусть R — рац. ф-ция

$r_1, \dots, r_n$ — рац. числа

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx$$

сводятся к интегралам от рац. дроби заменой

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d},$$ m — наим. общий знаменатель дробей

$r_1 = \frac{p_1}{m_1}, \ldots, r_n = \frac{p_n}{m_n}$

Частные случаи интегр-ия дробно-линейных иррациональностей.

1. $\int R(x, \sqrt[n]{x})\,dx$

Замена $x = t^n$

2. $\int R\left(x, \left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\right)dx$

Замена $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$

1.5.6. Интегрирование квадратичных иррациональностей с помощью тригонометрических (гиперболических) подстановок.

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C})\,dx$

подст. $t = x + \frac{B}{2A}$ сводятся к интегралам:

$\int R(x, \sqrt{a-x^2})\,dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$,

$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$

После подстановки:

1. $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$

$x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$)

Тогда при $x = a\sin t$ имеем:

$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = a\cdot\cos t$,

$dx = a\cos t\,dt$

2. $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$

Подст. $x = a\,tg\,t$ (или $x = a\,ctg\,t$)

При $x = a\,tg\,t$ имеем:

$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(1+tg^2 t)} = \dfrac{a}{\cos t}$,

$dx = \dfrac{a\,dt}{\cos^2 t}$

3. $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$

подст. $x = \dfrac{a}{\sin t}$ (или $x = \dfrac{a}{\cos t}$)

При $x = \frac{a}{\sin t}$ имеем:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}} =$$

$$= \frac{a \cos t}{\sin t};$$

$$dx = -\frac{a \cos t dt}{\sin^2 t}, \quad t = \arcsin \frac{a}{x}$$

При гиперболических:

Если $x = sh\, t$, то $dx = ch\, t \cdot dt$ и

$$t = \ln (x + \sqrt{x^2+1})$$

Определённый интеграл.

$$S_{aABb} \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Сумма площадей всех построенных прямоугольников $\approx$ площадь криволинейной трапеции.

Опред. интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Из интегрируемой ф-ции следует её ограниченность.

Ф-ция, непрерывная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.

Ограниченная ф-ция, имеющая на отрезке конечное число точек разрыва, интегрируема на этом отрезке.

Когда $f(x) > 0$ на $[a, b]$, то

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0; \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \text{ если } b < a$$

Свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b 1 \cdot dx = b - a$

2. Линейность

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\,dx =$$

$$= c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx$$

3. Аддитивность

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4. Если $f(x)$ непр. на $[a,b]$ и

$M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

6. Теорема о среднем.

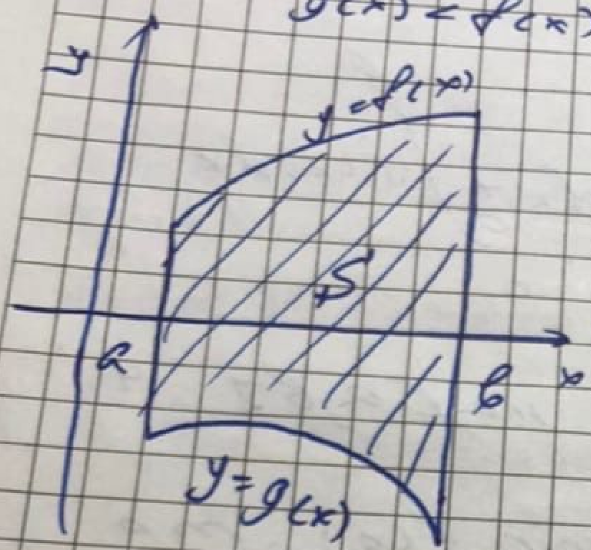
Если $f(x)$ непр. на $[a,b]$, то $\exists\, c \in [a,b]$., такая, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Приложения определённого интеграла

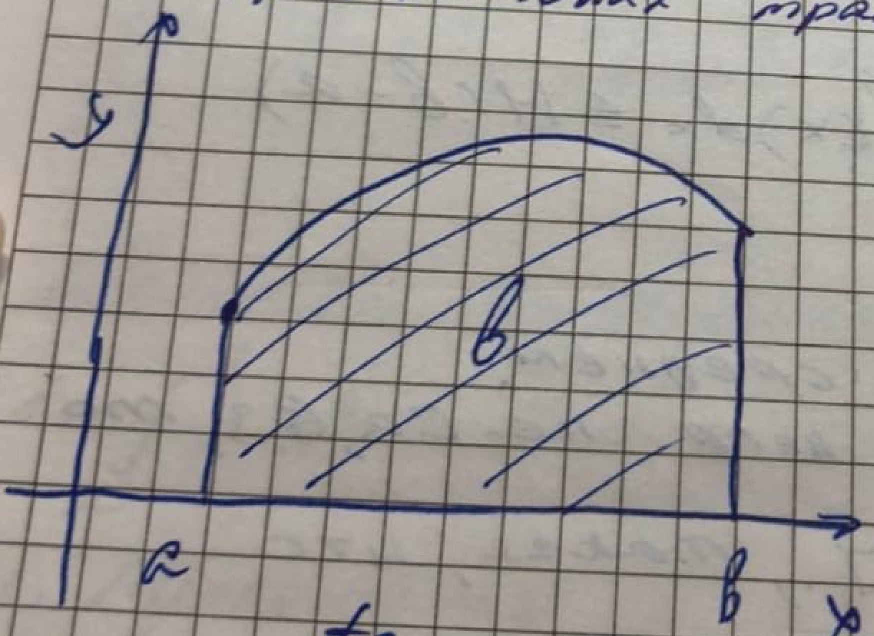
1. $y=f(x)$, $y=g(x)$

$g(x)<f(x)$ и $x=a$
$x=b$



$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

2. Криволинейная трапеция



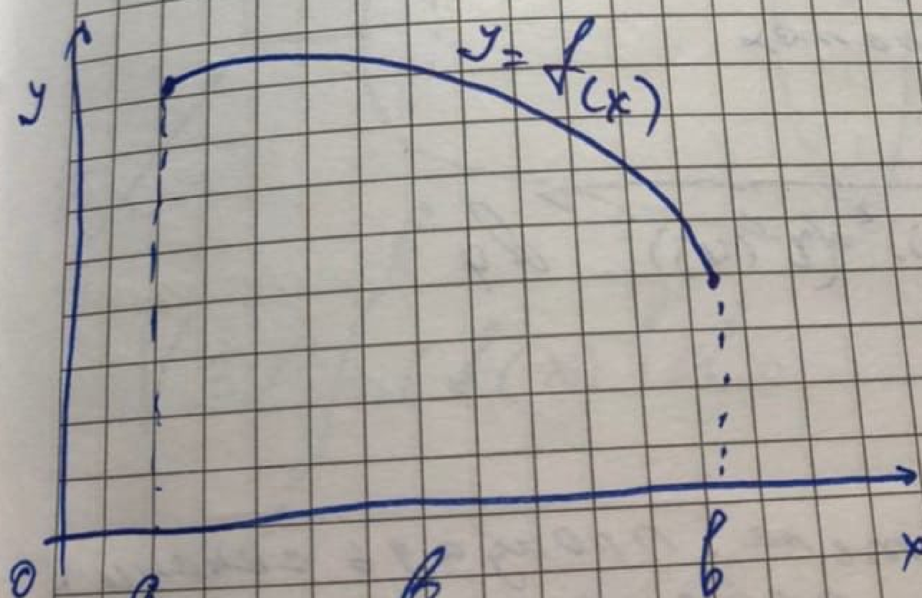
$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt$$

Сектор

3.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r(\varphi))^2 \, d\varphi$$

4. Дуга плоскоб кривоб



$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} \, dx$$

5. Длина дуги плоской кривой, заданной параметрическими ур-ниями

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

6. Длина дуги пространственной кривой

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

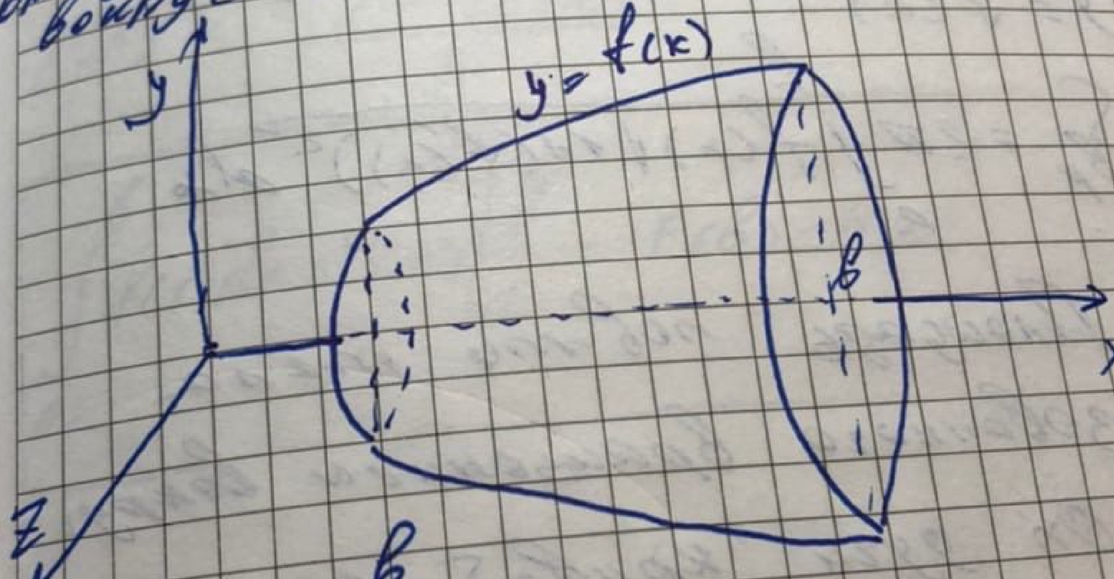
7. Длина дуги плоской кривой, заданной ур-ием в полярных координатах

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

8. Объём тела, площадь сечения которого плоскостью, $\perp$ оси Ox, известна как ф-ция $S = S(x)$

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

9 Объём тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг Ox



$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

10. Объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной параметрическими ур-ями

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2}(y(t))^2\,x'(t)\,dt$$

11. Площадь пов-ти тела образованного вращением вокруг оси Ox графика ф-ции $y=f(x)$

$$S_{вр}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

12. Площадь пов-ти тела образованного вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной параметрическими ур-ями.

$$S_{вр}=2\pi\int_{t_1}^{t_2}y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

Площадь криволинейной трапеции, заданной в параметрическом виде.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \xi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

Ф-лы понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$$

Несобственные интегралы

Интеграл с бесконечными пределами

Опр. При $y=f(x)$ интегрируемой на $[a,b]$ $\forall b>a$:

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$. Обозначается:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Если lim $\exists$ и конечен — сходящийся.

Если $F(x)$ — первообр. для $f(x)$ при $x\geq a$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} =$$

$$= F(+\infty) - F(a)$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$tg\,\frac{\pi}{2} = \infty$

$tg\,0 = 0$

Пример

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{1}^{+\infty} = +\infty$$ интеграл расходится

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x \;\nexists \Rightarrow$ Расходится

Признаки сходимости

1. If $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \ge a$, то из сходимости $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Если сходится большиб, то и меньшиб
Если расходится $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится

2. If $f(x) \ge 0$ и $g(x) > 0$ $\forall x \ge a$
$\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, то

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ оба сходятся или оба расходятся

Несобств.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$ при $\alpha \le 1$ расходится, а при $\alpha > 1$ сходится,

причём:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	$0.$
$ctg\alpha$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\nexists$	0	$\nexists$

Лекция 6

Пусть в интеграле верхний предел бесконечный.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

1. Заменим ∞ на b

2) $\int_a^b f(x)\,dx$ вычислим

3. Найдём предел при $b \to \infty$

Несобственный интеграл 1-рода

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Т.о. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$

Если предел существует, то несобств. интеграл – сходящийся.

- Если $\nexists$ → расходящийся.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

Несобств. интеграл

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha \le 1$ расходится
при $\alpha > 1$ сходится

Причём $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$, $\alpha > 1$.

Несобств. интегралы 2-го рода.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Если $f(x)$ непрерывна на $(a, b]$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Если $x = c$ разрыв внутри $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Интеграл в левой части рав-ва сход-ся если существуют оба интеграла в правой части.

$\ln 0 = -\infty$ при $\lim x \to 0$
$\ln e = 1$

Интеграл 2-го рода функции
$f(x) = x^{-\alpha}$ на $[0, 1]$.

Несобств. интеграл.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

При $\alpha \geq 1$ расходится,
при $\alpha < 1$ сходится. Причём

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1.$$

Признак сравнения

Пусть на полупрямой $[a; +\infty)$ или на $[a, b)$ ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и

$$0 \leq g(x) \leq f(x).$$ Тогда

а) Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ (любые предела соотв. $\int_a^b f(x)dx$ $\int_a^b g(x)dx$

б) если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится,

то расходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ — абсолютно

сходящийся, если сходится

интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ и условно

сходящийся, если сам интеграл сходится, а интеграл от модуля расходится.

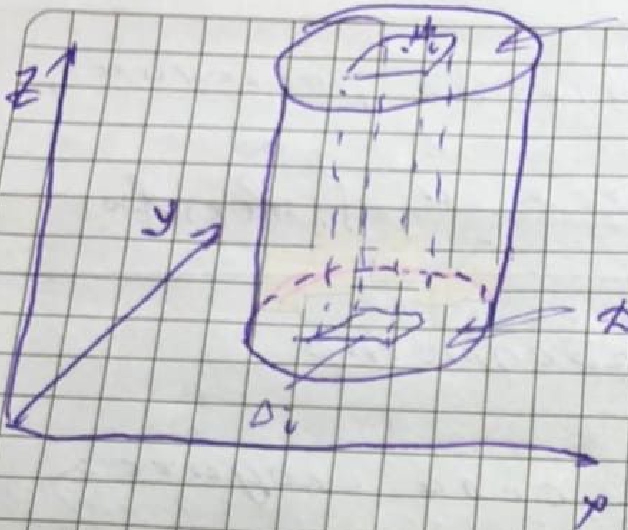
$\ln(\infty) = \infty$

31.3.2021.

Лекция 7.

Двойной интеграл.

Объём цилиндрического тела — двойной интеграл; Площадь криволинейной трапеции — определённый интеграл.



$$\Delta V_i = f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

Прямоуг. параллелепипед — элементарные части.

$$\boxed{V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \cdot \Delta y_i}$$

$d = \Delta_i$; Объём — предел при $d \to 0$

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \cdot \Delta y_i$$

двойной интеграл по области D_{xOy}

Обозначается:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Таким образом

$$\boxed{V=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}$$

Опр. 7.1. интегралом ф-ции $f(x,y)$ по обл. D называется предел под интегральной суммы

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)$ при условии, что диаметр d разбиения стремится к нулю, если этот предел существует и не зависит от разбиения области.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i\Delta y_i$$

Если ф-ция $f(x,y)$ непрерывна в области D, а область D ограничена кусочно-гладкой кривой, то ф-ция $f(x,y)$ в области D интегрируема.

Если подинтегр. ф-ция >0, то двойной инт-л. равен V цилиндрического тела.

Если интерпретировать, как поверхн. плотность, то двойной интеграл равен массе плоской фигуры.

Свойства

1. Линейность

$$\iint\limits_D (c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y))\,dx\,dy = c_1 \iint\limits_D f_1(x,y)\,dx\,dy + c_2 \iint\limits_D f_2(x,y)\,dx\,dy$$

2. Аддитивность

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

если $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$

3. Интегрирование неравенств

Если $f(x,y) \le g(x,y)$ в области D, то

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

4. Оценка двойного интеграла

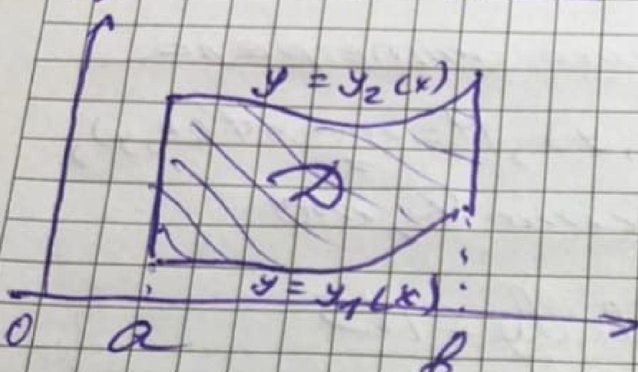
Если $m=\min\limits_D f(x,y)$, $M=\max\limits_D f(x,y)$, S – площадь области D, то

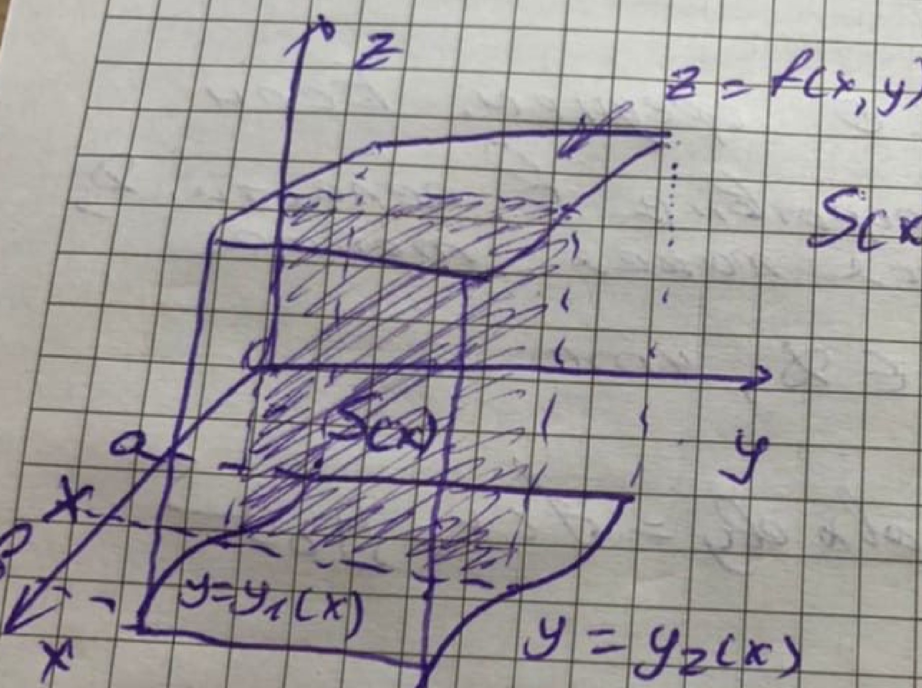
$$mS \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le MS$$

5. Теорема о среднем. Если $f(x,y)$ непрерывна в области D, то найдётся такая точка $P_0(x_0,y_0) \in D$, что

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0,y_0)\,S$$

Пусть D – огр. графиками $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$.





$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

$$V = \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

т.е.:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Правая часть — повторный интеграл, обычно записывают в виде:

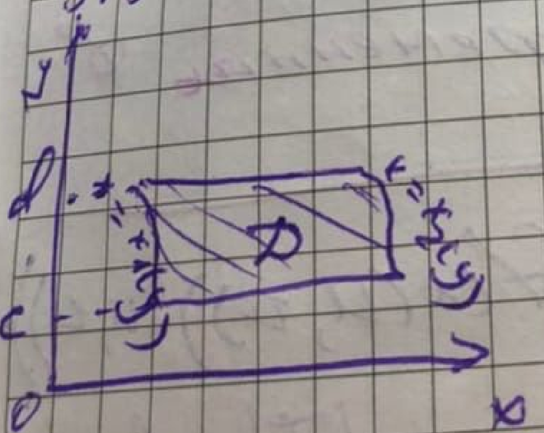
$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Если область D ограничена графиками $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ и прямыми $y = c$ и $y = d$, то двойной интеграл можно представить в виде повторного другим способом:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)}$$



Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть задана область D на пл-ти в коорд. (x, y) а на пл-ти (u, v) – область G.

Ф-ции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками этих областей.

Пусть они непрерывны, имеют непр. частные произв 1-го порядка в об-ти G.

Матрица Якоби

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Определитель – якобиан

Ф-ла замены переменных в двойном интеграле

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |I| \cdot du\,dv}$$

Выражение $|I|\,du\,dv$ — элемент площади в криволинейных коорд. u, v

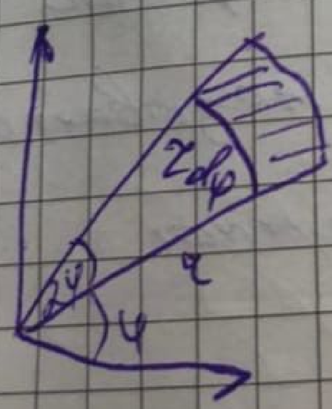
Полярные координаты

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$



$S = r\,dr\,d\varphi$