МИРЭА - РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математический анализ

2 семестр

Учебное пособие

Для студентов очной формы обучения
институтов РТС, ИТ, ФТИ

Москва

МИРЭА

2019

Составители: И. М. Аксененкова, Е.Н. Гущина, Т.Р. Игонина,
О.А. Малыгина, И.Н. Руденская, Е.В. Пронина,
Н.С. Чекалкин, А.Г. Шухов

Редактор Н.С.Чекалкин

Пособие содержит теоретический материал, практические задания и типовой расчет по математическому анализу (2 семестр) по разделам «Интегральное исчисление и его приложения», «Теория поля». В пособии приведены типовые варианты контрольных работ и экзаменационных билетов по курсу. Изложение теоретической части соответствует программе курса математического анализа (2 семестр), который читается преподавателями кафедры высшей математики 2 для студентов очной формы институтов РТС, ИТ, ФТИ.

Рецензенты: Т.Н.Бобылева,
А.В.Татаринцев

Введение

Пособие разработано коллективом преподавателей кафедры высшей математики-2 Московского технологического университета (МИРЭА) для студентов очной формы обучения институтов РТС, Информационных технологий и ФТИ. Пособие содержит обзор основных тем курса математического анализа 2-го семестра, список теоретических вопросов для подготовки к сдаче экзамена (зачета), перечень рекомендуемой литературы. Приведены примерные варианты контрольных работ по курсу, образец билета, а также типовой расчет. Решение типовых заданий обеспечит студенту полноценное усвоение содержания курса.

Содержание курса. Основное содержание курса математического анализа 2-го семестра (очная форма обучения) составляют следующие темы: неопределенный интеграл и методы интегрирования; определенный интеграл, его свойства, вычисление; приложения определенного интеграла; несобственные интегралы (от функций на бесконечном интервале и от неограниченных функций), признаки сходимости; двойной интеграл, его свойства, вычисление в декартовых и полярных координатах; приложения двойного интеграла в геометрии и механике; тройной интеграл, его свойства, вычисление в декартовых, цилиндрических и сферических координатах; приложения тройного интеграла; криволинейные интегралы (по длине дуги и по координатам), свойства и вычисление; формула Грина; поверхностные интегралы, их вычисление; скалярное и векторное поля, их характеристики; поток векторного поля, вычисление потока непосредственно и по теореме Остроградского – Гаусса; циркуляция векторного поля, вычисление циркуляции непосредственно и по теореме Стокса.

Структура пособия. В пособии - две части, в первую часть включены задачи для самостоятельной работы студентов (выполнение домашних работ, подготовка к контрольным работам), во вторую - задания типового расчета.

В пособие включено «Приложение», в котором приводятся основные определения и теоремы курса, разбираются алгоритмы решения типовых задач курса. От студента требуется успешное овладение материалом по указанным темам, т.е. необходимо знать определения понятий, формулировки и доказательства основных теорем курса. Студент также должен продемонстрировать умение решать типовые задачи данного курса.

Методические указания

В течение семестра по курсу математического анализа проводятся *две контрольные работы и выполняется типовой расчет.*

Контрольная работа №1

проводится по теме *«Методы интегрирования. Определенный интеграл и его приложения».*
Цель. Проверить усвоение основных приемов интегрирования; проверить умения вычислять определенный интеграл и с помощью определенного интеграла находить площади плоских фигур, длины дуг и т.д.
Содержание. В контрольную работу входят задачи, идентичные задачам части 1 данного пособия (т.е. задачи №1.1, 1.2, 1.3, 1.4).

Примерный вариант контрольной работы №1
1) Вычислить интегралы:

$$\int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx; \quad \int \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}dx; \quad \int \frac{\sqrt{\ln x}+3+\sqrt{x}}{x}dx; \quad \int arctgx\,dx$$

$$\int \frac{(7x+5)dx}{x^2+5x+6}; \quad \int \frac{(6x^2+5x+2)dx}{x\ +4}; \quad \int (\sin^2 5x - \cos^2 x)\,dx.$$

2) Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 xe^{3x}\,dx$.

3) Вычислить с помощью определенного интеграла площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$ и $y = e^{-x}, x = 1$.

Контрольная работа №2
проводится по теме *«Несобственные интегралы. Двойной и тройной интегралы, их приложения».*
Цель. Проверить усвоение основных приемов исследования несобственных интегралов на сходимость и их вычисления; проверить умение вычислять двойные и тройные интегралы и решать прикладные задачи.
Содержание. В контрольную работу №2 входят задачи, идентичные задачам из части 2 данного пособия (т.е. №2.1, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7).

Примерный вариант контрольной работы №2
1). Исследовать несобственный интеграл на сходимость. Если интеграл сходится, то вычислить его: $\int_0^{+\infty} xe^{-9x}dx$.

2). Расставить пределы интегрирования и изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$, где область D ограничена линиями: $y = 1/x,\ y = 4,\ y = x$.

3). Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $y = -x$ и параболой $y = 2x - x^2$, с помощью двойного интеграла.

4). Вычислить объем тела с помощью тройного интеграла: $\begin{cases} 1 \le z \le 2 \\ x^2 + y^2 \le 2z \end{cases}$

Замечание: по усмотрению преподавателя количество задач контрольных работ может быть изменено.

Типовой расчет. В типовой расчет входят задачи из части 2. Типовой расчет выполняется каждым студентом в отдельной тетради в соответствии с назначенным ему номером варианта. Студент подробно описывает решение каждой задачи, объясняет решения задач преподавателю, отвечает на вопросы. *Наличие выполненного типового расчета является обязательным условием допуска студента на экзамен или зачет.*

По итогам обучения на основе учебного плана проводится экзамен или зачет.

Примерный вариант экзаменационного (зачетного) билета

1. Вычислить:

а) $\int \frac{(arcctgx)^5 + x - 3}{1 + x^2} dx$; б) $\int \ln x dx$; в) $\int \frac{4x+7}{(1+x)(x+3)} dx$; г) $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$.

2. Исследовать несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-6x} dx$ на сходимость. Если интеграл сходится, то вычислить его.

3. Вычислить площадь области, ограниченной параболой и прямой: $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$.

4.С помощью тройного интеграла найти объем пирамиды, ограниченной плоскостями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + 3z = 12$.

5. Найти градиент скалярного поля $U = \arcsin^3 5x + xy^6 z^7 + 2z$.

6. Формула Грина. Вычислить с помощью формулы Грина: $\int\limits_L 3xydx + 5x^2 dy$, где $L = AB \cup BC \cup CA$, AB: $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, BC: $y = 1$, CA: $x = 0$.

7. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности σ: $2z = 4 - x^2 - y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (первый октант).

Теоретические вопросы по курсу

1. Определение первообразной, теорема о множестве первообразных.
2. Неопределенный интеграл. Основные свойства (линейность, интеграл от производной функции). Таблица интегралов.

3. Методы интегрирования: замена переменной в интеграле, интегрирование по частям.
4. Общая схема интегрирования рациональных функций, интегрирование простейших дробей, правильных и неправильных дробей.
5. Интегрирование тригонометрических функций; интегрирование иррациональностей. Примеры.
6. Определенный интеграл: определение, геометрический и механический смысл; свойства (линейность, аддитивность, интегрирование неравенств, теорема о среднем).
7. Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Примеры.
9. Приложения определенного интеграла (вычисление площадей плоских фигур, вычисление длины кусочно-гладкой кривой, вычисление объема тела вращения).
10. Несобственные интегралы от функции на бесконечном интервале. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Определение сходимости, признаки сходимости. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов.
11. Определение двойного интеграла и его геометрический смысл. Свойства линейности и аддитивности двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному. Приложения.
12. Двойной интеграл: интегрирование неравенств, оценка интеграла, теорема о среднем. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.
13. Определение тройного интеграла, его свойства. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах
14. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Вычисление площади сферы.
15. Определение криволинейного интеграла по длине дуги, его геометрический и механический смысл, вычисление.
16. Определение, основные свойства криволинейного интеграла по координатам и его вычисление. Формула Грина.
17. Условие независимости криволинейного интеграла по координатам от выбора пути интегрирования (на плоскости).
18. Определение поверхностного интеграла первого и второго типов, свойства, вычисление.
19. Скалярное поле. Производная по направлению и градиент скалярного поля. Геометрический смысл градиента, его свойства.
20. Векторное поле. Дивергенция векторного поля. Основные свойства и ее вычисление. Ротор векторного поля. Основные свойства и его вычисление.
21. Поток векторного поля и его вычисление. Теорема Гаусса-Остроградского.

22. Циркуляция векторного поля и ее вычисление. Теорема Стокса. Формула Грина, как частный случай теоремы Стокса.
23. Определение и основные свойства потенциального и соленоидального полей.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Ч. 1: Учебник для бакалавров / - Люберцы: Юрайт, 2016.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Ч. 2: Учебник для бакалавров / - Люберцы: Юрайт, 2016.

3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика: Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, дифференциальная геометрия.Т.2. - URSS. - 2017.

4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика: Кратные и криволинейные интегралы, векторный анализ, функции комплексного переменного, дифференциальные уравнения с частными производными. Т.4. Изд.4.- URSS. – 2017.

Основные типы задач по курсу математического анализа (2 семестр)

Материал данного раздела содержит две части:

- *часть 1* «Неопределенный интеграл. Методы интегрирования. Определенный интеграл и его приложения»;
- *часть 2* «Несобственные интегралы. Двойной и тройной интегралы, приложения. Элементы теории поля».

Часть 1
Неопределенный интеграл. Методы интегрирования. Определенный интеграл и его приложения

Задачи части 1 составляют основу контрольной работы №1. Для успешной сдачи контрольной работы рекомендуется прорешать все задачи части 1. Задачи, идентичные задачам этой части, включены в экзаменационный (зачетный) билет.

*<u>Основные определения и теоремы, а также разбор решения задач по части 1 приведены в **Приложении**</u>.*

Задачи по теме «Неопределенный интеграл. Методы интегрирования»

Задача 1.1. Вычислить неопределенный интеграл. Сделать проверку с помощью дифференцирования.

Указание: в задачах № 1 – 21 использовать метод замены переменной.

1	$\int \frac{x^2dx}{x^3+15}$	2	$\int \frac{2x-9}{x^2-9x+7}dx$	3	$\int \frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}}$
4	$\int \frac{\sin\sqrt{x}+8x}{5\sqrt{x}}dx$	5	$\int \frac{\cos xdx}{1+3\sin x}$	6	$\int tg5x\cdot dx$
7	$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^5}$	8	$\int 5\sqrt{x^2+1}\cdot xdx$	9	$\int \frac{xdx}{e^{x^2}}$
10	$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}dx}{x}$	11	$\int \frac{dx}{(5x+2)^2+1}$	12	$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2x^4+5}}$
13	$\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^3x}$	14	$\int \frac{e^{tgx}+5}{\cos^2 x}dx$	15	$\int \frac{\cos x}{4\sin^2 x-1}dx$
16	$\int \frac{(\arcsin x)^8-5x+6}{\sqrt{1-x^2}}dx$	17	$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$	18	$\int \sqrt{\frac{1+2\sqrt{x}}{x}}dx$
19	$\int \frac{\sin(\ln 3x)}{2x}dx$	20	$\int \frac{3\arcsin^9 x+x}{5\sqrt{1-x^2}}dx$	21	$\int 6x^3\cdot\cos(x^4)dx$

Указание: в задачах № 22 – 39 использовать метод интегрирования по частям.

22	$\int x^2 e^{-8x}dx$	23	$\int x\,arctgx\,dx$	24	$\int e^{4x}\sin 5x\,dx$
25	$\int (2+x^2)\cos x\,dx$	26	$\int \frac{2x\cdot dx}{\sin^2 x}$	27	$\int x^2 arctgx\,dx$
28	$\int \ln\left(x^2+1\right)dx$	29	$\int \arcsin 9x\,dx$	30	$\int x^2 \ln x\,dx$
31	$\int e^{3x}\sin^2 x\cdot dx$	32	$\int (7-x^2)\sin x\cdot dx$	33	$\int \frac{(5+x)\cdot dx}{\cos^2 x}$
34	$\int (5x+3)\cos 7x\cdot dx$	35	$\int \sin(\ln x)dx$	36	$\int x\ln(x^2+9)dx$
37	$\int \frac{\ln\left(\sin^2 x\right)dx}{\cos^2 x}$	38	$\int x\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx$	39	$\int \ln\left(\sqrt{x^2-9}\right)\cdot dx$

Указание: в задачах № 40 – 59 использовать приемы интегрирования дробно - рациональных функций.

40	$\int \frac{x^4}{x^2+25}dx$	41	$\int \frac{xdx}{x^2+7x+13}$
42	$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$	43	$\int \frac{6x+17}{x^2+x-2}dx$
44	$\int \frac{9x-13}{x^2-2x+6}dx$	45	$\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$
46	$\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$	47	$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

48	$\int \frac{(2x^2+x+4)dx}{x^3+x^2+4x+4}$	49	$\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$
50	$\int \frac{x+1}{x^2+6x-16}dx$	51	$\int \frac{dx}{x^3+3x^2-4x}$
52	$\int \frac{x^2+5x-6}{x^3-2x^2+x}dx$	53	$\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+6x}dx$
54	$\int \frac{x+1}{x^3-5x^2}dx$	55	$\int \frac{x^4+3x^2-5x+1}{x^2-1}dx$
56	$\int \frac{2x+2}{(x^2-1)^2}dx$	57	$\int \frac{x^2+4x-7}{x^2(3x-5)}dx$
58	$\int \frac{x^2-2x+4}{x^2+5x+6}dx$	59	$\int \frac{20dx}{x^3-x^2}$

Указание: в задачах № 60 – 79 использовать приемы интегрирования тригонометрических выражений.

60	$\int \frac{6dx}{5+4\sin x}$	61	$\int \frac{5dx}{3\sin x-4\cos x}$
62	$\int \frac{11dx}{5-3\sin x+4\cos x}$	63	$\int \frac{2dx}{1+\sin x+2\cos x}$
64	$\int \frac{\sin x\cos x}{(3+\cos x)^2}dx$	65	$\int \frac{\sin^3 x+\sin x}{1+\cos^2 x}dx$
66	$\int \frac{\cos^3 x+2}{\sin^2 x}dx$	67	$\int \cos^4 x\sin^3 xdx$
68	$\int \cos 3x\cos 7xdx$	69	$\int \frac{\sin^3 x+1}{\cos^2 x}dx$

70	$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x}$	71	$\int \cos^9(x)\cdot \sin^{10}(x)dx$
72	$\int \sin(7x)\cdot \cos(5x)dx$	73	$\int \frac{\sin^4 x - 1}{\cos^3 x}dx$
74	$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x - 1}$	75	$\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\cos^3 x}dx$
76	$\int (1 - \sin(11x)\cdot \cos(5x))dx$	77	$\int (\sin(3x)\cdot \cos(15x) + 7x^6)dx$
78	$\int \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin^4 x}{\cos^2 x + 1}dx$	79	$\int \frac{14dx}{5 - 4\cos x}$

Указание: в задачах №80-95 использовать приемы интегрирования выражений, содержащих иррациональности.

80	$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x} + 1}$	81	$\int \frac{\sqrt{x + 1}}{x}dx$
82	$\int \frac{dx}{\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$	83	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$
84	$\int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x^2}dx$	85	$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 3x + 2}}$
86	$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 - 5x + 3}}$	87	$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(3 - x^2\right)^3}}$
88	$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$	89	$\int x^2\sqrt{9 - x^2}dx$
90	$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x^{3/2} + 1}$	91	$\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x^{4/3} + 1}$
92	$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x} + 6}$	93	$\int \frac{\sqrt[4]{x}dx}{x - 16}$

94	$\int \sqrt{4x - x^2}\,dx$	95	$\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\,dx$

Задачи по теме «Определенный интеграл и его приложения»

Задача 1.2. Вычислить определенный интеграл.

1	$\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$	2	$\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5 + 4\cos x}$
3	$\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx$	4	$\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x + 4\cos x}$
5	$\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{7 + tgx}{(\sin x + 2\cos x)^2} dx$	6	$\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx$
7	$\int\limits_{0}^{2} \sqrt{4 - x^2} dx$	8	$\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{x dx}{2 + \sqrt{2x + 1}}$
9	$\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \cos x dx$	10	$\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx$
11	$\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$	12	$\int\limits_{1}^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos \ln x dx$
13	$\int\limits_{0}^{1} \frac{x dx}{1 + x^4}$	14	$\int\limits_{0}^{arctg\frac{2}{3}} \frac{6 + tgx}{9\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$
15	$\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx$	16	$\int\limits_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$
17	$\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^4 x dx$	18	$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{tgx}{\sin^2 x - \cos^2 x + 4} dx$
19	$\int\limits_{0}^{1} \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}$	20	$\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$

Задача 1.3. Вычислить с помощью определенного интеграла:

- площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми (для вариантов № 1 – 10);

- длину дуги кривой (для вариантов № 11 – 22);

- объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси OX (для вариантов № 23 – 30);

- площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси OX (для вариантов № 31-38).

1	$y=\cos^3 x\sin^2 x,$ $y=0, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$	2	$y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}},$ $y=0, x=1, x=e^3$
3	$y=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2},$ $y=0, x=1$	4	$y=\arccos x,$ $y=0, x=0$
5	$y=x\,arctgx,$ $y=0, x=\sqrt{3}$	6	$y=\ln x,$ ось OX и $x=e$
7	$y=\frac{x^2}{3}$ и $y=4-\frac{2}{3}x^2$	8	$y=\frac{1}{1+x^2}$ и $y=\frac{x^2}{2}$
9	$y=\ln x$ и $y=\ln^2 x$	10	$y=e^x$ и $y=e^{-x}, x=1$
11	$y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x,$ $0\le x\le\frac{8}{9}$	12	$y=1-\ln\sin x, \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$
13	$y=2-e^x, \ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}$	14	$\begin{cases}x=5(t-\sin t)\\ y=(1-\cos t)\end{cases}, 0\le t\le\pi$
15	$\begin{cases}x=10\cos^3 t\\ y=10\sin^3 t\end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{2}$	16	$\begin{cases}x=e^t(\cos t+\sin t)\\ y=e^t(\cos t-\sin t)\end{cases}$ $0\le t\le\pi$
17	$\rho=2(1-\cos\varphi), \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$	18	$\rho=3e^{\frac{3\varphi}{4}}, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$
19	$\rho=2\varphi, 0\le\varphi\le\frac{3}{4}$	20	$\rho=2\sin\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$

21	$y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4,$ $0 \le x \le \frac{1}{2}$	22	$y = \ln\left(x^2 - 1\right), 2 \le x \le 3$
23	$y = \sqrt{x}e^x, x = 1, y = 0$	24	$y = \frac{x^2}{2}, y = \frac{x^3}{8}$
25	$y = 5\cos x, y = \cos x,$ $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$	26	$y = e^{1-x}, y = 0,$ $x = 0, x = 1$
27	$y = \sin^2 x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$	28	$y = e^{-x}, y = 0,$ $x = 0, x = 1$
29	$(y-3)^2 + 3x = 0, x = -3$	30	$\begin{cases} x + y = 4 \\ y = 3x \\ y = 0 \end{cases}$
31	$y = x^3, x = 0, x = \frac{1}{2}$	32	$y = \sin x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$
33	$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$	34	$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$
35	$x^2 + y^2 = R^2$	36	$x^2 + 4y^2 = 4$
37	$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$	38	$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t}{3}\left(t^2 - 3\right) \end{cases}$

Задача 1.4. Вычислить с помощью определенного интеграла:

- *статические моменты* M_x *и* M_y *кривой* L *относительно осей Ox и Oy (линейная плотность* $\rho = 1$*) и найти координаты центра тяжести кривой* L *(для вариантов 1-10);*

- *моменты инерции* I_x *и* I_y *кривой* L *(линейная плотность* $\rho = 1$ *) относительно осей Ox и Oy (для вариантов 11-14);*

- статические моменты M_x и M_y пластины D относительно осей Ox и Oy (плотность $\rho = 1$) и найти координаты центра тяжести пластины D (для вариантов 15-24).

1	L : отрезок прямой $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1, \;\; x \ge 0, \;\; y \ge 0$	2	L : дуга астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \;\; x \ge 0, \;\; y \ge 0$
3	L : полуокружность $x^2 + y^2 = R^2, \quad y \le 0$	4	L : полуокружность $x^2 + y^2 = R^2, \quad x \le 0$
5	L : четверть окружности $x^2 + y^2 = R^2, \;\; x \le 0, \;\; y \ge 0$	6	L : парабола $3x = y^2, \; 0 \le x \le 3$
7	L : парабола $3y = x^2, \; 0 \le y \le 3$	8	L : треугольник, сторонами которого являются прямые $x + 2y = 2, \;\; x = 0, \;\; y = 0$
9	L : дуга экспоненты $y = e^{2x}, \; 0 \le x \le 2$	10	L : дуга цепной линии $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \; -1 \le x \le 1$
11	L : отрезок прямой $x + 3y = 3, \;\; x \ge 0, \;\; y \ge 0$	12	L : окружность $x^2 + y^2 = R^2$
13	L : полуокружность $x^2 + y^2 = R^2, \quad y \ge 0$	14	L : окружность $(x-1)^2 + y^2 = 1,$
15	D : треугольник, ограниченный прямыми $x + 2y = 2, \;\; x = 0, \;\; y = 0$	16	D : прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 2, \;\; x = 0, \;\; y = 0, \;\; y = 3$
17	D : фигура, ограниченная одной аркой синусоиды $y \le \sin x, \;\; y \ge 0, \;\; x \ge 0, \;\; x \le \pi$	18	D : фигура, ограниченная эллипсом и осями координат $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \;\; x \ge 0, \;\; y \ge 0$
19	D: круг радиуса R $x^2 + y^2 \le R^2$	20	D : фигура, ограниченная параболами $y^2 = 4x + 4, \;\; y^2 = 4 - 2x$
21	D : треугольник, ограниченный прямыми $x + y = 2, \;\; x = 2, \;\; y = 2$	22	D : фигура, ограниченная параболой и осью Oy $y^2 \le 1 - x, \;\; x \ge 0$
23	D: половина круга радиуса R $x^2 + y^2 \le R^2, \;\; x \ge 0$	24	D: четверть круга радиуса R $x^2 + y^2 \le R^2, \;\; x \ge 0, \; -x \le y \le x$

Часть 2

Несобственные интегралы. Двойной и тройной интегралы, их приложения. Криволинейные интегралы. Теория поля

Решение задач *части 2* позволяет успешно подготовиться к *контрольной работе №2*. *Часть 2 содержит задачи типового расчета*. Задачи, идентичные задачам этой части, включены в экзаменационный (зачетный) билет.

Основные определения и теоремы, а также разбор решения задач по части 2 приведены в ***Приложении***.

Типовой расчет

Задачи по теме «Несобственные интегралы»

Задача 2.1. Вычислить несобственный интеграл.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$	2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$	3. $\int\limits_1^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$
4. $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\sin 2x dx$	5. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+16x+15}$	6. $\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
7. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$	8. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$	9. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3}+3\sqrt{x}}$
10. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{chx}$	11. $\int_0^{+\infty} \frac{arctgx\,dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$	12. $\int\limits_0^1 \ln x dx$
13. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)arctg^2 x}$	14. $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}$	15. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x^4}}$
16. $\int\limits_0^1 \ln^2 xdx$	17. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(x^2+1\right)dx}{x^4+x^2+1}$	18. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+4x^2+8}$

19. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x}}$ 20. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\left(x^2-1\right)dx}{x^4+7x^2+12}$ 21. $\int\limits_{0}^{\ln^2 5}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

22. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)arctgx}$ 23. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{arctgxdx}{\left(1+x^2\right)^2}$ 24. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x\ln xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$

25. $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$ 26. $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-2x}\cos xdx$ 27. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{(x^2-3)dx}{x^4+10x^2+9}$

28. $\int\limits_{1}^{\frac{1}{e}}\frac{5dx}{x\ln^8 x}$

Задача 2.2. * Исследовать на сходимость несобственный интеграл (Задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

1. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x+\ln x}$

2. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+2x^2}+\sqrt{2x+3x^2}}$

3. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos 2x}{1+x}dx$

4. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}}$

5. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x+3)[\ln(x+2)+1]}$

6. $\int\limits_{0}^{2}\frac{\sqrt{2-x}dx}{x^2-5x+6}$

7. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+2}arctg(x+3)}$

8. $\int\limits_{0}^{3}\frac{x^2}{\sqrt[3]{27-x^3}(x+2)}dx$

9. $\int_0^{\infty}\left(\sqrt{x^3+2x+3}-\sqrt{x^3+2x+1}\right)dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{arctg\,2x}{1-\cos 5x}\,dx$

11. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+4}+\sin 5x}$

12. $\int_0^{2}\frac{x^2+\cos\left(x^2\right)}{\sqrt{8x-x^4}}\,dx$

13. $\int_0^{\infty}\frac{\cos 2x\cdot\sin^2 3x}{x}\,dx$

14. $\int_0^{1}\frac{\sin 3x}{e^x-x-1}\,dx$

15 $\int_0^{\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x+1}\right)dx$

16. $\int_1^{2}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\cos^4 x-\cos^4 1}\,dx$

17. $\int_1^{\infty}\frac{1}{\ln^2(5x)+5}\,dx$

18. $\int_1^{2}\frac{\sqrt{x^5-1}}{e^{x-1}-1}\,dx$

19. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}+arctg\,5x}$

20. $\int_1^{2}\frac{\sqrt{x^3-1}}{\sin^2 x-\sin^2 1}\,dx$

21. $\int_0^{\infty}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x}}\,dx$

22. $\int_0^1 \frac{\sin 3x dx}{\ln\left(1+x^2\right)}$

23. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(5x)}{x} dx$

24. $\int_0^{0.5} \frac{\cos 3x + \cos 5x}{\sqrt{\sin 3x} + \sqrt{\sin 2x}} dx$

25. $\int_0^\infty \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+x} dx$

Задачи по теме «Двойной интеграл»

Задача 2.3. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$.

№	a	b	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
1	0	2	$1-x^2/4$	$\sqrt{4-x^2}$
2	0	1	$-\sqrt{2-x^2}$	$2-x$
3	0	2	$-\sqrt{2x-x^2}$	$2-x$
4	0	$\sqrt{2}$	$x^2/2$	$\sqrt{3-x^2}$
5	0	2	$\sqrt{2x-x^2}$	$\sqrt{2x}$
6	0	1	$\sqrt{x}$	$3-2x$
7	0	1	$-\sqrt{1-x^2}$	$1-x$
8	0	$3/2$	$2x^2$	$6-x$
9	1	2	$-x$	$\sqrt{1+x^2}$
10	-1	$1/2$	x	$1-x^2$
11	0	1	$-x$	$\sqrt{4-x^2}$
12	-1	1	$-\sqrt{1-x^2}$	$1-x^2$
13	2	4	$\sqrt{4x-x^2}$	$\sqrt{8x}$
14	-6	2	$x^2/4-1$	$2-x$
15	$1/4$	1	$\sqrt{x}$	$\sqrt{4x}$

16	0	1	$(1-x^2)/2$	$\sqrt{1-x^2}$
17	0	1	$\sqrt{2x-x^2}$	$2-x$
18	0	1	$-\sqrt{4-x^2}$	$2x$
19	$1/2$	$3/2$	0	$\sqrt{2x-x^2}$
20	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$x^2/2$	$\sqrt{3-x^2}$
21	0	4	0	$\sqrt{25-x^2}$
22	1	4	0	$\sqrt{x}$
23	0	$3/4$	x^2	x
24	0	1	x	x^2+1
25	0	1	0	$4-x^2$
26	-1	1	x^2	1
27	0	1	x	$2-x$
28	0	2	0	$\sqrt{4-x^2}$

Задача 2.4. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры D, ограниченной заданными линиями.

1. $D: \quad y=x^2-4x; \quad y=2-3x$
2. $D: \quad y=\sqrt{x+1}; \quad y=-2x-2; \quad x=0$
3. $D: \quad y=x^2+1; \quad y=4-2x$
4. $D: \quad y=e^{-x}; \quad y=x+1; \quad x=1; \quad 0\le x\le 1$
5. $D: \quad y=4-x^2; \quad y=x^2-4$
6. $D: \quad y=\sqrt{2-x}; \quad y=2x-4; \quad x=0$
7. $D: \quad y=\ln x; \quad y=1-x; \quad x=2$
8. $D: \quad y=x^2+2x; \quad y=5x+4$
9. $D: \quad y=-\sqrt{x+1}; \quad y=3x+3; \quad x=0$
10. $D: \quad y=1-x^2; \quad y=x-1$
11. $D: \quad y=e^{x}; \quad y=-x+1; \quad x=1; \quad 0\le x\le 1$
12. $D: \quad y=-x^2; \quad y=x^2-2$
13. $D: \quad y=\sqrt{x-1}; \quad y=2-2x; \quad x=2$

14. $D: \quad y=-\ln x; \quad y=2; \quad x=2$

15. $D: \quad y=2x-x^2; \quad y=3x-2$

16. $D: \quad y=\sqrt{x+1}; \quad y=x^2-1; \quad x=0; \quad x\le 0$

17. $D: \quad y=x^2-3; \quad y=x-1$

18. $D: \quad y=e^{2x}; \quad y=-x+1; \quad x=-1$

19. $D: \quad y=x^2; \quad y=8-x^2$

20. $D: \quad y=\sqrt{x}; \quad y=2x+1; \quad x=0; \quad x=1$

21. $D: \quad y=-\ln x; \quad y=x-1; \quad x=2$

22. $D: \quad y=x^2-x; \quad y=3-3x$

23. $D: \quad y=-\sqrt{x-1}; \quad y=x-1; \quad x=2$

24. $D: \quad y=x^2-2; \quad y=3x+2$

25. $D: \quad y=e^x; \quad y=\sqrt{1-x}; \quad x=1; \quad 0\le x\le 1$

26. $D: \quad y=x^2-1; \quad y=7-x^2$

27. $D: \quad y=\sqrt{1-x}; \quad y=x^3-1; \quad x=0$

28. $D: \quad y=\ln x; \quad y=2-2x; \quad x=2$

Задача 2.5. * Вычислить двойной интеграл по области D.
(Задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

1. $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D: 2x \le x^2+y^2 \le 4x$

2. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$ $\qquad D: \begin{cases} -4y \le x^2+y^2 \le -8y \\ y \le x \\ y \le -x \end{cases}$

3. $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D: \begin{cases} 4x \le x^2+y^2 \le 8x \\ 0 \le y \le \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$

4. $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} -6x \le x^2+y^2 \le -8x \\ -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le -\sqrt{3}x \end{cases}$

5. $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} 2x \le x^2+y^2 \le 10x \\ 0 \le y \le \sqrt{3}x \end{cases}$

6. $\iint\limits_D \dfrac{y}{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} -2y \le x^2+y^2 \le -4y \\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le 0 \end{cases}$

7. $\iint\limits_D \dfrac{y}{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} 4y \le x^2+y^2 \le 6y \\ 0 \le y \le -x \end{cases}$

8. $\iint\limits_D \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} -4x \le x^2+y^2 \le -6x \\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le 0 \end{cases}$

9. $\iint\limits_D \dfrac{y}{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} 6y \le x^2+y^2 \le 10y \\ -\dfrac{y}{\sqrt{3}} \le x \le 0 \end{cases}$

10. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D: \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$

11. $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} \dfrac{\pi^2}{9} \le x^2+y^2 \le \dfrac{\pi^2}{4} \\ \sqrt{3}x \le y \le 0 \end{cases}$

12. $\iint\limits_D \arcsin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x^2+y^2 \le \dfrac{3}{4} \\ y \le x \\ y \le -x \end{cases}$

13. $\iint\limits_D x\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x^2+y^2 \le 4x \end{cases}$

14. $\iint\limits_D y\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} x^2+y^2 \le 9 \\ x^2+y^2 \le -6y \end{cases}$

15. $\iint\limits_D x\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x^2+y^2 \le 4y \end{cases}$

16. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+y^2\le -2x \end{cases}$

17. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad D:\begin{cases} x^2+y^2\le 2x \\ y\ge x^2 \end{cases}$

18. $\iint\limits_D \dfrac{xdxdy}{x^2+y^2}$ $\qquad D:\begin{cases} x^2+y^2\le 2y \\ x\ge y^2 \end{cases}$

19. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad D:\begin{cases} x^2+y^2\le 2y \\ y^2\ge -x \end{cases}$

20. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} x^2+y^2\le -2x \\ x^2\ge -y \end{cases}$

21. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad D:\begin{cases} x^2+y^2\le -2y \\ y^2\ge |x| \end{cases}$

22. $\iint\limits_D \sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}}\,dxdy$ $\qquad D:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1$

23. $\iint\limits_D \sqrt{36-4x^2-9y^2}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} 4x^2+9y^2\le 36 \\ \dfrac{x}{\sqrt{3}}\le y\le \sqrt{3}x \end{cases}$

24. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{4-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}}}$ $\qquad D:\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\ge 1 \\ \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}\le 1 \end{cases}$

25. $\iint\limits_D \sqrt{4-\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{4}}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}\ge 1 \\ \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{16}\le 1 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

26. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2\le x^2-y^2 \\ x\ge 0 \end{cases}$

27. $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ $\qquad D:\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^2\le 4\left(x^2-y^2\right)\\ x\ge 0\end{cases}$

28. $\iint\limits_D \dfrac{ydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad D:\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^2\le x^2-y^2\\ 0\le y\le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}\end{cases}$

Задачи по теме «Тройной интеграл»

Задача 2.6. С помощью тройного интеграла вычислить объем пирамиды V, ограниченной плоскостью α и координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$. Проверить ответ с помощью геометрической формулы нахождения объема пирамиды.

Варианты задания плоскости α :

1. $\alpha: 4x+2y-z=8$
2. $\alpha: x+2y-5z=20$
3. $\alpha: 4x+y-3z=24$
4. $\alpha: 5x+y-3z=30$
5. $\alpha: 2x+5y-3z=60$
6. $\alpha: 9x-y-3z=54$
7 $\alpha: x+5y-3z=45$
8. $\alpha: 9x+y-2z=18$
9. $\alpha: 6x-7y-3z=42$
10. $\alpha: x+9y-3z=27$
11. $\alpha: 12x-y+3z=36$
12. $\alpha: x+8y+5z=40$
13. $\alpha: 15x-y+3z=120$
14. $\alpha: -5x+6y-3z=30$
15. $\alpha: -9x+y+3z=60$
16. $\alpha: 7x+2y-3z=42$
17. $\alpha: -x+9y-7z=63$
18. $\alpha: 9x+3y-z=45$
19. $\alpha: x-11y-3z=33$
20. $\alpha: -2x+5y+3z=30$
21. $\alpha: 6x+y-8z=48$
22. $\alpha: 7x+y-3z=63$
23. $\alpha: 10x+2y+3z=60$
24. $\alpha: -x+12y-3z=36$
25. $\alpha: -3x-5y-z=15$
26. $\alpha: 9x+5y-3z=90$
27. $\alpha: -8x+y+3z=24$
28. $\alpha: 3x+9y-6z=18$

Задача 2.7. * С помощью тройного интеграла вычислить объем тела *V*, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам.
(Задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

1. $\begin{cases} x^2+y^2-z^2\le 0 \\ 2z\le x^2+y^2+1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2-z^2\le 0 \\ x^2+y^2+z^2\le 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2\le 1, z\ge 0 \\ z\le 4-x^2-y^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 1 \\ x^2+y^2\le y \end{cases}$

5. $\begin{cases} 1\le z\le 2 \\ x^2+y^2\le 2z \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+y^2\le 3z^2 \\ x^2+y^2+z^2\le 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 4 \\ x^2+y^2\le 3z \end{cases}$

8. $\begin{cases} z\ge -2 \\ x^2+y^2+z\le 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2\le z^2 \\ x^2+y^2\le 2-z \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2+y^2\le 6z \\ 9-x^2-y^2\ge 3z \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2z\ge x^2+y^2 \\ z^2\le x^2+y^2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+y^2\le 1, z\ge 0 \\ x^2+y^2+z^2\le 9 \end{cases}$

13. $\begin{cases} y^2+z^2\le 1, x\ge 0 \\ x^2+y^2+z^2\le 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 2 \\ x^2+y^2\ge z \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2+y^2\ge z\ge 0 \\ x^2+y^2\le 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+y+z\le 2 \\ z\ge 0, x^2+y^2\le 1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} z\ge x^2+y^2 \\ 2z\le 3-x^2-y^2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2+y^2\le z^2 \\ x^2+y^2+z^2\le 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x\le z\le 2x, x\ge 0 \\ x^2+y^2\le 4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2+y^2\le 3z \\ x^2+y^2+z^2\le 4 \end{cases}$

21. $\begin{cases} z\ge 0 \\ z\le 4-x^2-y^2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 0\le z\le 5-x-y \\ x^2+y^2\le 9 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 2z \\ x^2+y^2\le z^2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 1\le z\le 2 \\ z\le 4-x^2-y^2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} z \ge 0, x^2 + y^2 \le 1 \\ z^2 \le x^2 + y^2 + 1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 1, z \ge 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 2 \\ z \le x^2 + y^2 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 0 \le z \le x^2 + y^2 \\ x + y \le 2, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

Задачи по теме «Криволинейный и поверхностный интегралы»

Задача 2.8. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ по замкнутому контуру L (обход контура L против часовой стрелки) двумя способами: непосредственно и по формуле Грина.

№	L	P(x,y)	Q(x,y)
1	ΔABC $A(1,1)$ $B(2,2)$ $C(1,3)$	$2(x^2 + y^2)$	$(x+y)^2$
2	$x^2/4 + y^2/9 = 1$	$xy + x + y$	$xy + x - y$
3	$x^2 + y^2 = 2x$	$xy + 1$	$xy - x + y$
4	$x^2 + y^2 = 4$	$-x^2 y$	xy^2
5	$x^2/9 + y^2/4 = 1$	$x + y$	$-x + y$
6	$y = \sin x, y = 0, 0 \le x \le \pi$	$e^x y$	e^x
7	$x^2/4 + y^2 = 1$	$x^3 y$	$x^2 + 1$
8	$y = x^2, y = 1$	$x^2 y$	$x + y$
9	$y = 3x^2, y = 2x$	$(x+y)^2$	$-(x-y)^2$
10	ΔABC $A(0,0)$ $B(2,4)$ $C(0,4)$	$3x^2 y$	$x^3 + 2x$
11	$y = 2x^2, y = 2$	$x^2 - 2xy$	$y^2 - 2xy$
12	$x^2 + y^2 = 4$	$y^2 + x$	$x^2 + y$
13	$y = x^2/4, y = x/2$	$2xy$	$-x^2$
14	$x = 2y^2, 2y = x$	$2xy$	$x^2 + y^2$
15	$x^2 + y^2 = 9$	$x + y^2$	$x - y^2$
16	$x^2/4 + y^2/25 = 1$	$y + x^2$	$-x$
17	$2y = x^2 + 2, y = 3x - 3$	$x + y$	$x - y$

18	ΔABC $A(0,0)\quad B(1,1)\quad C(0,2)$	xy	x^2+y^2
19	$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=1$	$(x+y)^2$	$-(x-y)^2$
20	$x^2+y^2=25$	$x+y^2$	x^3
21	$x^2/9+y^2/16=1$	$x-y$	x^2-y^2
22	$y=x^2, y=3x-2$	x^2-2xy	$2xy+y^2$
23	ΔABC $A(1,1)\quad B(2,2)\quad C(1,3)$	$(x+y)^2$	x^2+y^2
24	$y=\sqrt{x}, 3y=x+2$	x^2-y	x^2+y
25	ΔABC $A(1,2)\quad B(2,4)\quad C(1,4)$	$\dfrac{y^2+1}{y}$	$\dfrac{2y^2-x}{y^2}$
26	$y=2\sqrt{x}, y=2x$	$2xy^2$	$3x^2y$
27	$x^2+y^2=4$	$x+2y$	$y-2x$
28	ΔABC $A(1,1)\quad B(3,2)\quad C(2,5)$	$(x+y)^2$	$-x^2-y^2$

Задача 2.9. * Вычислить площадь части поверхности σ, заключенную внутри цилиндрической поверхности Ц.

(Задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

№	σ	Ц
1	$z=xy$	$x^2+y^2=1$
2	$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$	$x^2+y^2=1$
3	$z=4-x-y$	$x^2+y^2=2x$
4	$z^2=x^2+y^2$	$x^2+y^2=2x$
5	$x^2+z^2=1, z\ge 0$	$x^2+y^2=1$
6	$x^2+y^2+z^2=4$	$x^2+y^2=2y$
7	$x^2+y^2+z^2=9$	$\left(x^2+y^2\right)^2=9\left(x^2-y^2\right)$
8	$z^2=x^2+y^2$	$\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)$
9	$2z=xy$	$x^2+y^2=4$

10	$2z = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = 2$
11	$z^2 = 2xy$	$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$
12	$2z = 4 - x^2 - y^2$	$x^2 + y^2 = 2$
13	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 = 2x$
14	$z = \sqrt{x^2 - y^2}$	$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$
15	$2z = x^2 - y^2$	$x^2 + y^2 = 1$
16	$2z = x^2 + y^2$	$(x^2 + y^2)^2 = 2xy$
17	$1 - z = \left(x^2 + y^2\right)^{3/2}$	$z \ge 0$
18	$z = x^2 + y^2$	$4(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$
19	$x^2 + y^2 = z^2$	$(x^2 + y^2)^2 = 2xy$
20	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	$(x^2 + y^2)^2 = 2xy$
21	$x^2 + z^2 = 1$	$x + y = 0, x - y = 0$
22	$2z^2 = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = 2y$
23	$4z = x^2 + y^2$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8xy$
24	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$	$x^2 + y^2 = 2x$
25	$x^2 + y^2 + z^2 = 25, z \ge 0$	$x^2 + y^2 = 9$
26	$z^2 = x^2 - y^2$	$x^2 + y^2 = 2x$
27	$4z = x^2 + y^2, z \le 1$	$y^2 = 3x^2$
28	$z = 4 + 2x - y$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4xy$

Задачи по теме «Элементы теории поля»

Задача 2.10. Найти градиент скалярного поля $u(M)$. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\overline{a}(M)$.

№	Скалярное поле $u(M) = F(x, y, z)$ Векторное поле $\overline{a}(M)$
1	$u(M) = e^{xy} + 2\cos^2(z + x)$ $\overline{a}(M) = (tg^3 x)\vec{i} + \cos^2 xy^3 \vec{j} + \ln(xz^2 + y^2 z)\vec{k}$
2	$u(M) = xy^3 + \ln(y + z^2)$ $\overline{a}(M) = (\arccos 2x + 3z^2 y)\vec{i} + \ln^2 y\ \vec{j} + (z^2 y^2 x + e^{2xy})\vec{k}$

3	$u(M)=\sqrt{x^2+y}+x\sin(3y+z)$ $\bar{a}(M)=(tg^5x+\sqrt{yz})\vec{i}+\arcsin(yx)\vec{j}+4z^3xy^2\vec{k}$
4	$u(M)=z^2e^x+\arcsin(y^2+xz)$ $\bar{a}(M)=(\ln^2 yz+ye^x)\vec{i}+tg3y\vec{j}-(\cos^2 yx+\sin^2 z)\vec{k}$
5	$u(M)=\ln(x^2y)+\sqrt{x^3+yz}$ $\bar{a}(M)=(x^2y+\ln yz)\vec{i}+(\sin xy+2^z)\vec{j}+(5^z+z\cos x)\vec{k}$
6	$u(M)=\cos(2x^3+y)-xe^{yz}$ $\bar{a}(M)=(\arcsin xy+xz)\vec{i}+(\cos 2xy-tg^2z)\vec{j}+(\ln(z+x)+y^3)\vec{k}$
7	$u(M)=\arcsin(xy)+z\ln^2 y$ $\bar{a}(M)=(y\ln x+x\ln y)\vec{i}+(\sqrt{xy}-\sqrt{yz})\vec{j}+(arctgxz+x\ln^2 y)\vec{k}$
8	$u(M)=x^2yz-ytg^2(z+x)$ $\bar{a}(M)=(z\cos^2 x+x\sin y)\vec{i}+\sqrt[3]{x+2y^2}\,\vec{j}+(\ln x^3z+yz)\vec{k}$
9	$u(M)=\ln^2(3y+z)+\sin(x^3y)$ $\bar{a}(M)=\cos(xy+z)\vec{i}+y^2\ln(x+z)\vec{j}+2x\arccos yz\vec{k}$
10	$u(M)=3ze^{x/y}-\sqrt[3]{yz}$ $\bar{a}(M)=e^{x^2y-z^2x}\vec{i}+\sqrt[3]{xy}\cos z\vec{j}+\ln^2 xyz\vec{k}$
11	$u(M)=3xy\cos z+\ln(x+z^2)$ $\bar{a}(M)=(e^{x^3y}+e^{y^3z})\vec{i}+(\arccos xy^2+\ln^3 xz)\vec{j}+\sqrt{yz^2+x^2y}\,\vec{k}$
12	$u(M)=2y\cdot\arccos(x^3z)$ $\bar{a}(M)=(\ln(\cos x)+2^{y^3z})\vec{i}+(\sqrt[3]{yz}+tg3x)\vec{j}+(\cos^2 yz+e^{x^3y})\vec{k}$
13	$u(M)=2tg(xy^3)-xyz^2$ $\bar{a}(M)=(tg^3yz+\sqrt[3]{x})\vec{i}+(2x\arcsin y+\sin xz)\vec{j}+(e^{z/y}+e^{y/z}+e^{x/y})\vec{k}$
14	$u(M)=2^{x^2y-xz^3}-\sqrt{z+x}$ $\bar{a}(M)=(xe^y+ye^x+ze^y)\vec{i}+(\cos xy^2+\ln xz^2)\vec{j}+(\ln xz+y\sqrt{z})\vec{k}$
15	$u(M)=2xe^{yz}+\sqrt[4]{y^3+z^2}$ $\bar{a}(M)=(\ln(\sin x)+tg^3yz)\vec{i}+(\sin^2 xz-3^{\ln y})\vec{j}+(arctgz+y\ln(1+z^2))\vec{k}$
16	$u(M)=\ln(2y+z^2)+\cos^2 3xy$

	$\bar{a}(M)=(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z})\vec{i}+(\sin^2 xy-\cos 2xy)\vec{j}-\sqrt{xy+yz^2}\,\vec{k}$
17	$u(M)=5^{\ln yz}+\arcsin\sqrt{xy}$ $\bar{a}(M)=(\cos 2xy+y^3z)\vec{i}+(\ln yz+\sqrt{y})\vec{j}+(y\arcsin z+x\sqrt{1+z^2})\vec{k}$
18	$u(M)=\sqrt[3]{xy+yz+xz}$ $\bar{a}(M)=(x^2y+y^2x)\vec{i}-(y\ln yz-y)\vec{j}+(\cos^2 xz-\cos 2xz)\vec{k}$
19	$u(M)=\sin(\ln yx)+e^{z^3y}$ $\bar{a}(M)=(tg3xy+tg3yz)\vec{i}-(e^{yz}+ye^{xz})\vec{j}+\sqrt{xz^2+yz}\,\vec{k}$
20	$u(M)=\ln(\cos x^2)+\sqrt{xyz}$ $\bar{a}(M)=(z\arcsin x+y\sqrt{1+x^2})\vec{i}+(\ln^3 xz+y^2xz)\vec{j}-(xe^y+ye^z+ze^y)\vec{k}$
21	$u(M)=(x+y^2)arctg\sqrt{yz}$ $\bar{a}(M)=(e^{x/y}+e^{z/x}+e^{z/y})\vec{i}+(\sin^2 xy-3^{zx})\vec{j}-(arctgz+\sqrt[3]{xy})\vec{k}$
22	$u(M)=x^2(\ln yz+y^2)$ $\bar{a}(M)=(\sqrt{xy}+\ln xy)\vec{i}+(z^2tgx+y^2\cos x)\vec{j}-(\arccos z+xy\sqrt{1+z^2})\vec{k}$
23	$u(M)=y^2(7^{\cos x}-\sqrt{zx})$ $\bar{a}(M)=(5^{tgy}+y^x)\vec{i}+(\sin yz+\cos xz)\vec{j}-y\ln(xz+z)\vec{k}$
24	$u(M)=\ln^2(xy+z^3)$ $\bar{a}(M)=(\arccos x+2\cos y)\vec{i}+(tg(\ln x)+\ln(tgy))\vec{j}+\sqrt[3]{x^3y+y^3x}\ln z\vec{k}$
25	$u(M)=\cos(3x-yz^2)$ $\bar{a}(M)=(\sqrt[3]{x}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}})\vec{i}+(ye^{xz}+ze^{xy})\vec{j}+(\sin^2 3z+\cos^2 3x)\vec{k}$
26	$u(M)=(y-\ln 3z)e^{tgx}$ $\bar{a}(M)=(arctgx+yz\ln(1+x^2))\vec{i}+(\sqrt{xy}-\sqrt[3]{xz})\vec{j}+\sin(xz^2+y^2z)\vec{k}$
27	$u(M)=tg3xy^2+\ln^2 3xz$ $\bar{a}(M)=e^{x^2y+z^2x-y^2z}\vec{i}+(\ln yz+\ln xz)\vec{j}+(tgz^2+x^3y)\vec{k}$
28	$u(M)=xy^2z^3+\arcsin\sqrt{2yz}$

	$\bar{a}(M) = (2^{xyz} + y^4)\vec{i} + y(\ln xy - 2)\vec{j} + (z^2 \arccos x + x \arccos z)\vec{k}$

Задача 2.11. Найти поток векторного поля $\bar{a}(M)$ через замкнутую поверхность σ двумя способами:

1) непосредственно, вычисляя потоки через все гладкие куски поверхности σ;

2) по теореме Остроградского-Гаусса.

№	$\bar{a}(M)$	σ
1	$x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$	$2z = 4 - x^2 - y^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$
2	$\mathbf{i} + \mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$	$z^2 = x^2 + y^2, 0 \le z \le 2$
3	$xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 1, y \ge 0, 0 \le z \le 2$
4	$(1-z)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + \mathbf{k}$	$(1-z)^2 = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1$
5	$xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + x\mathbf{k}$	$2z = 9 - x^2 - y^2, z \ge 0$
6	$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$
7	$\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 4, x \ge 0, y \ge 0, 1 \le z \le 3$
8	$x^2\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \ge 0, y \ge 1, z \ge 0$
9	$xy(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \mathbf{k}$	$y = 4 - x^2 - z^2, y \ge 0, z \ge 0$
10	$\mathbf{i} + \mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$	$2 - z = x^2 + y^2, z = -2$
11	$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$y^2 = x^2 + z^2, 0 \le y \le 1, z \le 0$
12	$xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4, 0 \le z \le 1$
13	$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$	$z^2 = x^2 + y^2, -1 \le z \le 0, x \ge 0$
14	$x\mathbf{i} + \mathbf{j} + xz\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 9, y \ge 0, 0 \le z \le 2$
15	$x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$2z = 2 - x^2 - y^2, z \ge 0$
16	$\mathbf{i} - \mathbf{j} + x(2-z)\mathbf{k}$	$(2-z)^2 = x^2 + y^2, y \ge 0, z \ge 0$
17	$y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$
18	$x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$z = x^2 + y^2, x \ge 0, z \le 4$
19	$yz\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$	$x^2 - 2y + y^2 = 0, 0 \le z \le 4$
20	$2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$	$x + y + z = 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$
21	$x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$	$2z = 8 - x^2 - y^2, z \ge 2, y \ge 0$
22	$2xyz\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} - z^2y\mathbf{k}$	$x + y = 2, x \ge 0, y \ge 0, 0 \le z \le 4$
23	$2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$	$x^2 - 2z + z^2 = 0, 0 \le y \le 2$
24	$x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$	$2y - 3 = x^2 + z^2, y \le 2, z \ge 0$

25	$xy\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+2yz\mathbf{k}$	$x^2+y^2=z^2, x\ge 0, y\ge 0, z\le 1$
26	$y\mathbf{i}+2x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$z=1-x^2-y^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$
27	$x\mathbf{i}-y\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2+z^2=4, 0\le x\le y, z\ge 0$
28	$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$2z=4-x^2-y^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$

Задача 2.12. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)$ по контуру Г двумя способами:

1) непосредственно, вычисляя линейный интеграл векторного поля по контуру Г

2) по теореме Стокса.

№	$\overline{a}(M)$	Г
1	$y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$	$x^2+z^2=4-y, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
2	$2y\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}-3x\mathbf{k}$	$x^2+y^2=1, x+y+z=3$
3	$xy\mathbf{i}+z^2\mathbf{j}$	$y^2=1-x-z, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
4	$x\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+y\mathbf{k}$	$x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$
5	$xy\mathbf{i}+x\mathbf{j}-yz\mathbf{k}$	$x^2+y^2=4, y=z$
6	$xy(\mathbf{i}+\mathbf{j})+z\mathbf{k}$	$x^2+z^2=1-y, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
7	$\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2=1, x=z+1$
8	$y\mathbf{i}-z^2\mathbf{j}+x\mathbf{k}$	$x+2y+2z=4, x=0, y=0, z=0$
9	$z^2\mathbf{i}-x\mathbf{j}-y\mathbf{k}$	$x^2+z^2=4, y=z+1$
10	$y^2\mathbf{i}-x^2\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$3x+y+2z=6, x=0, y=0, z=0$
11	$y^2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$	$z^2=1-x-y, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
12	$z\mathbf{i}-x\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2=9, x+y+z=5$
13	$z^2\mathbf{i}-x^2\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$2x+y+z=2, x=0, y=0, z=0$
14	$y\mathbf{i}-z\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$	$y^2=1-x-z, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
15	$z\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2=1, x+y+z=3$
16	$y\mathbf{i}-x^2\mathbf{j}+x\mathbf{k}$	$x^2+y^2=4, z=y+2$

17	$xy(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$	$x+2y+z=4, x=0, y=0, z=0$
18	$z\mathbf{i}-y\mathbf{j}-x\mathbf{k}$	$x^2+z^2=1-y, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
19	$yz\mathbf{i}-x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$	$x^2+y^2=9, z=x+1$
20	$xz\mathbf{i}+z\mathbf{j}+y\mathbf{k}$	$y^2+z^2=1, x+y+z=3$
21	$z\mathbf{i}-y\mathbf{j}-x\mathbf{k}$	$x^2+y^2+z^2=4, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
22	$z\mathbf{i}+zx\mathbf{j}+y\mathbf{k}$	$z=x^2+y^2, z=4$
23	$2y\mathbf{i}+z^2\mathbf{j}-x\mathbf{k}$	$x^2+y^2=4, y=z$
24	$x\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+y\mathbf{k}$	$2x+y+2z=2, x=0, y=0, z=0$
25	$-2xz\mathbf{i}+2x\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2=1-z, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
26	$z\mathbf{i}-2y\mathbf{j}-x\mathbf{k}$	$x^2+y^2+z^2=4, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
27	$x\mathbf{j}-\mathbf{k}$	$x^2+y^2+z^2=1, z=y$
28	$z\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}-x\mathbf{k}$	$x^2+y^2=1-z, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)

Для успешного усвоения курса математического анализа второго семестра требуются знания и умения по курсам математического анализа и алгебры первого семестра:
- вычисление производных функций одной и нескольких переменных;
- кривые и поверхности второго порядка.

В дальнейшем полученные знания по математическому анализу второго семестра будут использоваться в курсах:

- Математический анализ (III семестр, IV семестр);
- Дифференциальные уравнения;
- Теория вероятностей;
- Численные методы;
- Методы математической физики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Авторы: *Малыгина О.А., Игонина Т.Р., Шухов А.Г.*

В данном приложении излагается краткая теория и методика решения типовых задач по курсу математического анализа 2-го семестра. Материал, относящийся к темам «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Несобственные интегралы», «Криволинейные интегралы», написан Малыгиной О.А., Шуховым А.Г.

Материал, относящийся к темам «Поверхностные интегралы», «Элементы теории поля», написан Малыгиной О.А., Игониной Т.Р., Шуховым А.Г.

Содержание «Приложения»

1. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования.
2. Определенный интеграл и его приложения.
3. Несобственные интегралы.
4. Двойные и тройные интегралы, приложения.
5. Криволинейные интегралы.
6. Поверхностные интегралы.
7. Скалярное и векторное поля, их характеристики.
8. Поток векторного поля и его вычисление.
9. Циркуляция векторного поля и ее вычисление.

1. Неопределенный интеграл

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на некотором интервале $(a,b)\subset R$. Если найдётся такая функция $F(x)$, что при всех $x\in(a,b)$ имеет место равенство

$$F'(x)=f(x),$$

то функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$.

Нахождение первообразной - операция, обратная к операции вычисления производной. Найти первообразную по данной функции $f(x)$ означает восстановить функцию $F(x)$ по её производной.

Однозначно восстановить функцию $F(x)$ по её производной невозможно: если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, то для произвольной константы $C\in R$ функция $F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$, и любая первообразная представима в этом виде.

Теорема. Пусть $F(x)$ -- первообразная функции $f(x)$ на $(a,b)\subset R$ и функции $\Phi(x)$ -- некоторая другая первообразная. Тогда эти первообразные отличаются на константу, т.е. $\Phi(x) = F(x) + C$ при некоторой постоянной C.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, при этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования, $\int$ - знаком интеграла. Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Таблица неопределённых интегралов для часто встречающихся функций сразу следует из таблицы производных.

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. При $n \neq -1$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$$

3. В любом интервале, где $x \neq 0$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

4. Если $a = const$, $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C.$$

5. В частности, если $a = e$, то

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

6.

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

7. В любом интервале, где $\cos x \neq 0$,

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

8. В любом интервале, где $\sin x \neq 0$,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

9. На интервале $(-|a|,|a|)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

В частности, на интервале $(-1,1)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

10. Если $a = const$, то

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

В частности,

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

11. Если $k = const$, то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C,$$

при этом правую часть этого равенства называют иногда «*длинным логарифмом*».

12. Если $a = const$, то

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

Свойства неопределённого интеграла

Свойства неопределённого интеграла вытекают из определения и соответствующих свойств производных.

1. Из определения вытекает, что

$$\int F'(x)\, dx = F(x) + C$$

и

$$\left(\int f(x)\, dx \right)' = f(x).$$

Эти равенства показывают, что операции дифференцирования и интегрирования можно рассматривать как взаимно обратные.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx,$$

где k - произвольная постоянная.

3. Интеграл от суммы конечного числа слагаемых равен сумме интегралов от каждого слагаемого:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Из 2 и 3 следует, что для любых постоянных C_1 и C_2

$$\int (C_1 f(x) + C_2 g(x))\,dx = C_1\int f(x)\,dx + C_2\int g(x)\,dx$$

Последнее равенство называют свойством *линейности* неопределённого интеграла.

Методы интегрирования

1.1 Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием будем называть интегрирование с помощью свойства линейности и использования таблицы.

Пример 1. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int (2\sin x + 5\cos x)\,dx$$

Решение.

$$\int (2\sin x + 5\cos x)\,dx = \int 2\sin x\,dx + \int 5\cos x\,dx = 2\int \sin x\,dx + 5\int \cos x\,dx =$$

$$= 2(-\cos x) + 5\sin x + C = 5\sin x - 2\cos x + C.$$

Пример 2. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int\left(3x^2 - 7e^{2x} + \frac{1}{4x^2-9}\right)dx$$

Решение.

$$\int\left(3x^2 - 7e^{x} + \frac{1}{4x^2-9}\right)dx = 3\int x^2dx - 7\int e^x dx + \int\frac{1}{4x^2-9}\,dx =$$

$$= 3\frac{x^3}{3} - 7e^x + \frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2-(3/2)^2}\,dx =$$

$$= x^3 - 7e^x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot(3/2)}\ln\frac{|x-3/2|}{|x+3/2|} + C =$$

$$= x^3 - 7e^x + \frac{1}{12}\cdot\ln\frac{|x-3/2|}{|x+3/2|} + C.$$

<u>*Пример*</u> 3. Вычислить интеграл $\int\left(3^x e^x + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{6}{x^2+7}\right)dx$

<u>*Решение*</u>.

$$\int\left(3^x e^x + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{6}{x^2+7}\right)dx = \int(3e)^x dx + \int\frac{1}{\sin^2 x}dx - 6\int\frac{1}{x^2+7}dx =$$

$$= \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} - ctgx - 6\int\frac{1}{x^2+(\sqrt{7})^2}dx =$$

$$= \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} - ctgx - 6\frac{1}{\sqrt{7}}arctgx(\frac{x}{\sqrt{7}}) + C \ \blacksquare$$

<u>*Пример*</u> *4*. Вычислить интеграл $\int\left(\frac{8x^5+\sqrt{x}}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$

<u>*Решение*</u>.

$$\int\left(\frac{8x^5+\sqrt{x}}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$$

$$= 8\int x^2 dx + \int x^{\frac{-5}{2}}dx + \int\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}dx - \int\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx =$$

$$= \frac{8x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{-3}{2}} + \ln|x+\sqrt{x^2+3}| - \arcsin(\frac{x}{2}) + C \ \blacksquare$$

1.2 Метод замены переменной (метод подстановки)

Формула интегрирования подстановкой (замены переменной).
Пусть $u = \varphi(x)$. Тогда

$$\int f(u)\,du\Big|_{u=\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

В левой части после вычисления интеграла $\int f(u)du$ сделана подстановка $u = \varphi(x)$.

Формулу замены переменной можно также представить в виде

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)du = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)).$$

Этот прием называют также *подведением под знак дифференциала*.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int e^{x^2} x dx$.

Решение. Обозначим $u = x^2$, тогда $du = 2xdx$, и $xdx = \frac{1}{2}du$. По формуле интегрирования подстановкой получаем:

$$\int e^{x^2} x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ x\,dx = \frac{1}{2}du \end{array} \right| = \int e^u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Решение этой задачи с помощью подведения под знак дифференциала имеет вид

$$\int e^{x^2} xdx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Пример 2. *Линейная замена*.

Пусть

$$\int f(z)\,dz = F(z) + C.$$

Вывести формулу

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Решение. Положим $z = ax + b$, тогда $dz = adx$, и $dx = \frac{1}{a}dz$. По формуле интегрирования подстановкой получаем:

$$\int f(ax+b)\,dx = \int f(z)\,\frac{1}{a}\,dz\Big|_{z=ax+b} = \frac{1}{a}\,F(z) + C\Big|_{z=ax+b} = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Замечание. В справедливости формулы можно также убедиться с помощью непосредственного дифференцирования.

Отсюда получаем следующие равенства, которые полезно запомнить.

Дополнение к табличным интегралам

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C; \quad \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C; \qquad \int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln(|\ ax+b\ |) + C;$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

1.3 Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы. Тогда $(uv)' = u'v + uv'$. Интегрируя это равенство, получаем формулу, которая называется формулой интегрирования по частям.

Формула интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int 5e^{2x} x dx$.

Решение. По формуле интегрирования по частям $\int 5e^{2x} x dx = = 5\int e^{2x} x dx =$

$$\left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x} dx & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{matrix} \right| = 5\{x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} x dx\} = = 5\{x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}\} + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int x \ln x dx$.

Решение. По формуле интегрирования по частям

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx & v = \frac{1}{2} x^2 \end{matrix} \right| = \ln x \cdot \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x \cdot \frac{1}{2} x^2 - \frac{x^2}{4} + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Решение. По формуле интегрирования по частям

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = x \, dx \\ du = \frac{dx}{1 + x^2} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1 + x^2}.$$

Преобразуем интеграл в правой части:

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{arctg} x\right) + C = \frac{1}{2}\left((x^2+1)\operatorname{arctg} x - x\right) + C.$$

Формулу интегрирования по частям можно применять несколько раз.

<u>*Пример*</u> 3. Вычислить интеграл $\int x^2 \sin x dx$.

<u>*Решение*</u>. По формуле интегрирования по частям

$$\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{matrix} \right| = -x^2 \cos x + 2\{x \sin x - \int \sin x dx\} =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + \cos x + C$$

1.4 Прием возвращения к исходному интегралу

<u>*Пример*</u> 3. Вычислить интеграл

$I = \int \sqrt{1-x^2}\, dx$

<u>*Решение*</u>. Применим формулу интегрирования по частям. При этом в правой части получается такой же интеграл I.

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{1-x^2} \\ dv = dx \\ v = x \\ du = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{matrix} \right| = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x + C.$$

Получаем уравнение

$$I = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x + C,$$

откуда

$$I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C.$$

Замечание. Этим же приемом вычисляются также интегралы вида

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx \quad \text{и} \quad \int e^{ax}\cos(bx)dx.$$

Пример 4. Найти интеграл $J=\int e^x\sin x dx$.

Решение. Применим дважды формулу интегрирования по частям.

$$J=\int e^x\sin x dx=\begin{vmatrix} u=e^x & du=e^x dx \\ dv=\sin x dx & v=-\cos x \end{vmatrix}=-e^x\cos x+\int e^x\cos x dx=$$

$$\begin{vmatrix} u=e^x & du=e^x dx \\ dv=\cos x dx & v=\sin x \end{vmatrix}=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x dx$$

Получаем уравнение

$$J=-e^x\cos x+e^x\sin x-J,$$

откуда

$$J=\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x\{-\cos x+\sin x\}+C.$$

Типы интегралов, которые вычисляются по формуле интегрирования по частям

1. Интегралы вида

$$\int P(x)\sin(ax)dx, \quad \int P(x)\cos(ax)dx, \quad \int P(x)e^{ax}dx,$$

где $P(x)$ - многочлен, $a=const$.

Применяя формулу интегрирования по частям, полагаем

а) для первого интеграла $u=P(x)$, $dv=\sin(ax)dx$;

б) для второго интеграла $u=P(x)$, $dv=\cos(ax)dx$;

в) для третьего интеграла $u=P(x)$, $dv=e^{ax}dx$.

2. Интегралы вида

$$\int P(x)\arcsin x dx, \quad \int P(x)\arccos x dx, \quad \int P(x) arctgx dx,$$

$$\int P(x) arcctgx dx, \quad \int P(x)\ln x dx,$$

где $P(x)$ - многочлен.

В таких интегралах полагаем $dv = P(x)dx$, а в качестве u берем оставшуюся функцию, т.е., соответственно, $u = \arcsin x$, $u = \arccos x$, $u = arctgx$, $u = arcctgx$, $u = \ln x$.

3. Интегралы вида

$\int e^{ax} \sin(bx)dx$, $\int e^{ax} \cos(bx)dx$, $a = const$.

Здесь полагаем $u = e^{ax}$ и, дважды применяя формулу интегрирования по частям, приходим к уравнению относительно искомого интеграла (см. пример, разобранный выше).

1.5 Методы интегрирования некоторых типов элементарных функций

1.5.1 Интегрирование неправильных рациональных дробей

Определение. Функция $R(x)$ называется *рациональной функцией*, или *рациональной дробью*, если она представляет собой отношение двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Пусть степень многочлена $P(x)$ равна *m*, а степень $Q(x)$ равна *n*.

Если $m < n$, то дробь $R(x)$ называется *правильной*, а если $m \geq n$, то *неправильной*.

Если дробь неправильная, то её числитель $P(x)$ можно поделить на знаменатель $Q(x)$ и представить в виде суммы многочлена и правильной дроби:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = N(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}.$$

Здесь $N(x)$ - многочлен, называемый *целой частью* рациональной дроби $R(x)$, а $r(x)$ - остаток , степень которого меньше *n*.

Следовательно, *интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию многочленов и правильных дробей*.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 2x + 1}{x - 2} dx$.

Решение. Подынтегральное выражение является неправильной дробью. Для вычисления интеграла представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Разделим многочлен $P(x)=x^3+5x^2-2x+1$ на $Q(x)=x-2$:

$$\begin{array}{r|l} x^3+5x^2-\ 2x+\ 1 & x-2 \\ \underline{x^3-2x^2\qquad\qquad\quad} & \overline{x^2+7x+12.} \\ 7x^2-\ 2x+\ 1 & \\ \underline{7x^2-14x\qquad} & \\ 12x+\ 1 & \\ \underline{12x-24} & \\ 25 & \end{array}$$

Следовательно, $N(x)=x^2+7x+12$, $r(x)=25$. Таким образом,

$$R(x)=\frac{x^3+5x^2-2x+1}{x-2}=x^2+7x+12+\frac{25}{x-2}$$

и искомый интеграл равен

$$\int\frac{x^3+5x^2-2x+1}{x-2}dx=\int(x^2+7x+12+\frac{25}{x-2})dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+7\frac{x^2}{2}+12x+25\ln|x-2|+C.$$

1.5.2 Интегрирование правильных рациональных дробей

Теорема (о разложении правильной рациональной дроби).

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь, и знаменатель $Q(x)$ представлен в виде

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

где $p_i^2-4q_i<0$.

Тогда имеет место следующее разложение

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{A_j^{(1)}}{x-x_j}+\dots+\frac{A_j^{(k_j)}}{(x-x_j)^{k_j}}\right)+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{B_i^{(1)}x+C_i^{(1)}}{x^2+p_ix+q_i}+\dots+\frac{B_i^{(m_i)}x+C_i^{(m_i)}}{(x^2+p_ix+q_i)^{m_i}}\right)$$

,

где

$$A_j^{(1)},A_j^{(2)},\dots,A_j^{(k_j)},\ j=1,2,\dots,r;\ B_i^{(1)},B_i^{(2)},\dots,B_i^{(m_i)},$$

$C_i^{(1)},C_i^{(2)},\dots,C_i^{(m_i)},i=1,2,\dots,s,$ - действительные числа.

Следствие. Интегрирование правильных рациональных дробей сводится к вычислению интегралов вида:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx \quad \text{и} \quad \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx,$$

где $p^2-4q<0$, а n –натуральное.

Подынтегральные функции $\frac{A}{(x-a)^n}$ и $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ называются *простейшими* дробями.

<u>*Замечание*</u>. Вид разложения правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших зависит только от знаменателя $Q(x)$.

Для иллюстрации теоремы приведем вид разложения для ряда правильных дробей без вычисления коэффициентов.

$$\frac{5x-1}{(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+4}+\frac{B}{x+3};$$

$$\frac{4x+1}{(x+3)(x+4)x(x-2)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-2};$$

$$\frac{5x^2+1}{(x+3)(x+1)^3} = \frac{A}{x+3}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3};$$

$$\frac{4x+1}{(x^2+x+1)x(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-2};$$

$$\frac{4x^3+3}{(x^2+x+1)^2x(x-2)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+x+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+x+1)}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-2};$$

$$\frac{3x-6}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

<u>*Пример*</u> 2. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{x^2+7x+12}dx$.

<u>*Решение*</u>. Подынтегральное выражение является правильной дробью. Для вычисления интеграла представим эту дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого сначала найдем корни знаменателя и разложим его на линейные множители

$$x^2+7x+12=(x+3)(x+4).$$

Тогда существуют такие числа A и B, что

$$\frac{1}{x^2+7x+12} = \frac{1}{(x+4)(x+3)} = \frac{A}{x+4}+\frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx+4B}{(x+4)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A+4B)}{(x+4)(x+3)}.$$

Полученная дробь должна совпадать с исходной при любых x, следовательно, коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях обеих дробей должны быть равными. Отсюда $\begin{cases} A+B=0 \\ 3A+4B=1 \end{cases}$, то есть A = -1, B = 1. Таким образом, исходную дробь можно представить в виде

$$\frac{1}{x^2+7x+12}=\frac{-1}{x+4}+\frac{1}{x+3}$$

и, следовательно,

$$\int\frac{1}{x^2+7x+12}dx=\int\frac{-1}{x+4}dx+\int\frac{1}{x+3}dx=-\ln|x+4|+\ln|x+3|+C.$$

1.5.3 Интегрирование простейших дробей

Из теоремы о разложении правильной рациональной дроби вытекает, что любую правильную рациональную дробь можно представить в виде линейной комбинации дробей вида:

1) $\frac{A}{x-a}$, *2)* $\frac{A}{(x-a)^n}$, *3)* $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, *4)* $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, $(p^2-4q<0)$.

Эти дроби называются *простейшими* дробями.

Вычислим интегралы от этих дробей.

1) $$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{1}{x-a}d(x-a)=A\ln|x-a|+C.$$

2) $$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=\frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C$$

3) $$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+\frac{p^2}{4})+q-\frac{p^2}{4}}dx=\int\frac{A(x+\frac{p}{2})+B+A\frac{p}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}d(x+\frac{p}{2}).$$

Сделаем замену $t=x+\frac{p}{2}$ и обозначим

$$B+A\frac{p}{2}=M,\qquad q-\frac{p^2}{4}=L^2.$$

Тогда искомый интеграл перепишется в виде

$$\int \frac{At+M}{t^2+L^2}dt = \frac{A}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+L^2} + M\int \frac{1}{t^2+L^2}dt = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+L^2)}{t^2+L^2} + M\int \frac{1}{t^2+L^2}dt =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+L^2) + \frac{M}{L} arctg\frac{t}{L} + C = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{M}{L} arctg\frac{2x+p}{2L} + C.$$

4) Метод интегрирования простейших дробей последнего типа изложен в лекциях.

<u>*Пример*</u> 3. Вычислить интеграл $\int \frac{7}{(5x+12)^9}dx$.

<u>*Решение*</u>. Сделаем замену $t = 5x+12$, тогда $dt = 5dx$. Следовательно,

$$\int \frac{7}{(5x+12)^9}dx = \frac{7}{5}\int \frac{dt}{t^9} = \frac{7}{5}\cdot\frac{t^{-8}}{(-8)} + C = \frac{-7}{40}\cdot\frac{1}{(5x+12)^8} + C$$

<u>*Пример*</u> 4. Вычислить интеграл $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+3}dx$.

<u>*Решение*</u>.

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{3x+5}{(x^2+2x+1)+2}dx = \int \frac{3(x+1)+2}{(x+1)^2+2}dx$$

Сделаем замену $t = x+1$, $dt = dx$. Тогда искомый интеграл перепишется в виде

$$\int \frac{3(x+1)+2}{(x+1)^2+2}dx = \int \frac{3t+2}{t^2+2}dt = \int \frac{3t}{t^2+2}dt + \int \frac{2}{t^2+2}dt =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+2) + \frac{2}{\sqrt{2}} arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{2}{\sqrt{2}} arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Схема интегрирование рациональных дробей

1. Определить тип заданной рациональной дроби (неправильная, правильная, простейшая).
2. Если дробь неправильная, то представить её в виде суммы многочлена и правильной дроби.
3. Если дробь правильная, то представить её в виде суммы простейших дробей.
4. Проинтегрировать полученные выражения.

<u>*Пример*</u> 5. Вычислить интеграл $\int \frac{2x^3+3x^2+8x+8}{x^4+2x^3+4x^2}dx$.

<u>*Решение*</u>. Подынтегральное выражение является правильной дробью. Для вычисления интеграла представим эту дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого сначала найдем корни знаменателя и разложим его на множители

$$x^4+2x^3+4x^2 = x^2(x^2+2x+4).$$

Тогда разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{2x^3+3x^2+8x+8}{x^4+2x^3+4x^2} = \frac{2x^3+3x^2+8x+8}{x^2(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+4} =$$

$$= \frac{Ax^3+2Ax^2+4Ax+Bx^2+2Bx+4B+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+2x+4)} = \frac{(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(4A+2B)x+}{x^2(x^2+2x+4)}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях, получаем

$$\begin{cases} A+C=2 \\ 2A+B+D=3 \\ 4A+2B=8 \\ 4B=8 \end{cases}$$, откуда A = 1, B = 2, C = 1, D = -1.

Следовательно,

$$\int \frac{2x^3+3x^2+8x+8}{x^4+2x^3+4x^2}dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{x-1}{x^2+2x+4}dx .$$

Дальнейшие вычисления провести самостоятельно.

<u>*Пример*</u> 6. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+5x+8}{x+1}dx$.

<u>*Решение*</u>. Подынтегральное выражение является неправильной дробью. Для вычисления интеграла представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби

$$\int \frac{x^2+5x+8}{x+1}dx = \int (x+4+\frac{4}{x+1})dx = \frac{x^2}{2}+4x+4\ln|x+1|+C .$$

1.5.4 Интегрирование тригонометрических выражений

Интегрирование произведений синусов и косинусов от разных аргументов

Интегралы вида

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx,\ \int \sin \alpha x \sin \beta x dx,\ \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

вычисляются с применением формул

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x)$$
$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x)$$
$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x)$$

Пример 1.

$$\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

Интегрирование произведений степеней синуса и косинуса с одинаковыми аргументами

$$\int \sin^n x \cos^m x dx.$$

1. n и m – целые числа, и хотя бы одно из чисел n, m – нечетное.

Замена $t = \sin x$ при нечетном m (или $t = \cos x$ при нечетном n).

Пример 2.

$$\int \sin^6 x \cos^5 x dx = \int \sin^6 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^6 x(1-\sin^2 x)^2 d\sin x =$$

$$= \int t^6(1-t^2)^2 dt = \frac{t^7}{7} - 2\frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{\sin^7 x}{7} - 2\frac{\sin^9 x}{9} - \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$$

Пример 3. $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\cos x dx = \int \frac{\sin^4 x}{(1-\sin^2 x)} d\sin x = \int \frac{t^4}{(1-t)(1+t)}dt =$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt - \int (t+1)dt = \frac{1}{2}\left(-\ln|1-t| + \ln|1+t|\right) - \frac{t^2}{2} - t + C =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)-\frac{\cos^2 x}{2}-\cos x+C.$$

2. n и m – четные положительные числа. Можно понизить степени тригонометрических функций с помощью формул

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Пример 4. $\int\sin^4 x dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$

$$=\frac{1}{4}(x-\sin 2x+\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx= \qquad \frac{x}{4}-\sin 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$$

3. n и m – четные и хотя бы одно из них отрицательно, Подстановка $t = tg\, x$ или $t = ctg\, x$.

Пример 5.

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int tg^2x(1+tg^2x)dtgx=\int(t^2+t^4)dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{3}tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x+C.$$

4. $(n+m)$ – четное отрицательное число.
Подстановка $t = tg\, x$.

Пример 6. $\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x\ \sin^3 x}}$

Решение. Поскольку $n+m=-2$, то подстановка $t = tg\, x$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x\ \sin^3 x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\cos^4 x\ tg^3x}}=\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tg^3x}}=\int\frac{d(tgx)}{\sqrt{tg^3x}}$$

$$=\frac{(tgx)^{\frac{-1}{2}}}{(-1/2)}+C.$$

Универсальная подстановка

Функция $R(u,v)$ называется *рациональной функцией двух переменных*, если она представляет собой отношение многочленов *двух переменных* $P(u,v)$ и $Q(u,v)$:

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}.$$

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

где $R(u,v)$ – рациональная функция, сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*

$$t = tg\frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \; x = 2arctgt, \; dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 7. $\int \frac{1}{\sin x}dx = 2\int \frac{dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|tg\frac{x}{2}| + C$

Частные подстановки

1. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\sin x$, т.е.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то можно использовать подстановку $t = \cos x$.

Пример 8. $\int \frac{\sin^3 x}{1+2\cos x}dx$.

Решение. Положим $t = \cos x$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+2\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{1+2\cos x}dx = -\int \frac{(1-t^2)}{1+2t}dt.$$

Доделать самостоятельно.

2. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\cos x$, т.е.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то можно использовать подстановку $t = \sin x$.

3. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,

то можно использовать подстановку $t = tgx$. При этом

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad x = arctgt, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

<u>*Пример*</u> 9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x - 3\cos^2 x}dx$

<u>*Решение*</u>. Поскольку подынтегральное выражение не меняется при замене $\sin x$ на $(-\sin x)$ и $\cos x$ на $(-\cos x)$, то положим $t = tgx$.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x - 3\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\dfrac{t^2}{1+t^2} - \dfrac{3}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t^2-3}dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\ln|t-\sqrt{3}| - \ln|t+\sqrt{3}|\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{tgx-\sqrt{3}}{tgx+\sqrt{3}}\right| + C.$$

1.5.5 Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Пусть R – рациональная функция, $r_1, \dots, r_n$ – рациональные числа.

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx$$

сводятся к интегралам от рациональной дроби заменой

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d},$$

где m – наименьший общий знаменатель дробей

$$r_1 = \frac{p_1}{m_1}\ , \ldots ,\ r_n = \frac{p_n}{m_n}\ .$$

Приведем два частных случая интегрирования дробно-линейных иррациональностей.

1. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx$$

сводятся к интегралам от рациональной дроби заменой $x = t^n$.

2. Интегралы вида

$$\int R\left(x,\ \left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\right)dx$$

сводятся к интегралам от рациональной дроби заменой $t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}dx.$

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$, тогда $x = \dfrac{1}{t^2-1}$, $dx = \dfrac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$. Тогда

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = \int\frac{-2t^2dt}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}+1} + \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}-1} + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\dfrac{x+3+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Решение. Замена $t = x^{\frac{1}{6}}$, тогда $x = t^6, dx = 6t^5dt$. Тогда

$$\int \frac{x+3+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$$

$$=\int \frac{(t^6+3+t^3)6t^5dt}{t^2}=6\int (t^9+t^6+3t^3)dt=\frac{3}{5}t^{10}+\frac{6}{7}t^7+\frac{9}{2}t^4+C=$$

$$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+C.$$

1.5.6 Интегрирование квадратичных иррациональностей с помощью тригонометрических (гиперболических) подстановок

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx$

после выделения под знаком радикала полного квадрата и использования линейной подстановки $t=x+\frac{B}{2A}$ сводятся к интегралам одного из следующих трех типов

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx.$$

После использования надлежащей тригонометрической подстановки интегралы этих трех типов сводятся к интегралам от функции, рационаьно зависящей от $\sin x$ и $\cos x$.

1. $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$.

Подстановка $x=a\sin t$ (или $x=a\cos t$). Тогда при $x=a\cdot\sin t$ имеем $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=a\cdot\cos t$, $dx=a\cdot\cos t dt$.

2. $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$

Подстановка $x=a\cdot tgt$ (или $x=a\cdot ctgt$).

Тогда при $x=a\cdot tgt$ имеем $\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(1+tg^2 t)}=\frac{a}{\cos t}$; $dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$.

3. $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$.

Подстановка $x=\dfrac{a}{\sin t}$ (или $x=\dfrac{a}{\cos t}$).

При $x=\dfrac{a}{\sin t}$ имеем $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=\sqrt{\dfrac{a^2(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}}=\dfrac{a\cos t}{\sin t}$;

$dx=-\dfrac{a\cos t dt}{\sin^2 t}, t=\arcsin\dfrac{a}{x}$.

<u>*Пример*</u> 3. $\int x\sqrt{9-x^2}dx.$

<u>*Решение*</u>. Это интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, поэтому используем замену $x=3\sin t$. Тогда

$$\int x\sqrt{9-x^2}dx=\int 3\sin t\cdot 3\cos t\cdot 3\cos t dt=-27\int\cos^2 t\cdot d(\cos t)=-27\frac{\cos^3 t}{3}+C=-9\cos^3 t+C=$$

$$=-9\frac{(\sqrt{9-x^2})^3}{27}+C=\frac{-1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}+C\ .$$

<u>*Пример*</u> 4. $\int\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx$

<u>*Решение*</u>. Это интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, используем замену $x=2tgt$. Тогда $\sqrt{x^2+2^2}=2\sqrt{(1+tg^2 t)}=\dfrac{2}{\cos t}$; $dx=\dfrac{2dt}{\cos^2 t}$

и, следовательно,

$$\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx=\int\frac{2}{\cos t\cdot 2tgt}\frac{2dt}{\cos^2 t}=2\int\frac{1}{\sin t\cdot\cos^2 t}dt=2\int\frac{\sin t\cdot dt}{\sin^2 t\cdot\cos^2 t}=-2\int\frac{du}{(1-u^2)u^2},$$

где $u=\cos t$. Представив подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей, получим:

$$-2\int\frac{du}{u^2(1-u)(1+u)}=-\int\left(\frac{2}{u^2}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)dx=\frac{2}{u}-\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=$$

$$=\frac{2}{\sin t}-\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+C=\frac{2\sqrt{9+x^2}}{x}-\ln\frac{\sqrt{9+x^2}+x}{\sqrt{9+x^2}-x}+C.$$

На последнем шаге пользуемся равенством $\sin t=\dfrac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}}=\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}$.

Пример 5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}dx$

Решение. Это интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, поэтому

используем замену $x=\frac{3}{\sin t}$. Тогда $t=\arcsin\frac{3}{x}$,

$\sqrt{x^2-3^2}=\sqrt{\frac{3^2}{\sin^2 t}-3^2}=\sqrt{\frac{3^2(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}}=\frac{3\cos t}{\sin t}$, $\quad dx=-\frac{3\cos t dt}{\sin^2 t}$.

Следовательно

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}dx=\int \frac{\sin t\cdot \sin t}{3\cdot\ 3\cos t}\frac{(-3\cos t)dt}{\sin^2 t}=-\int\frac{dt}{3}=\frac{-t}{3}+C=\frac{-1}{3}\arcsin\frac{3}{x}+C.$$

При вычислении интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx.$$

свести подынтегральную функцию к рациональной можно также с помощью *гмперболических* подстановок.

Напомним, что гиперболические функции определяются следующим образом.

$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ – *гиперболический синус*;

$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ – *гиперболический косинус*;

$thx=\frac{shx}{chx}$ – *гиперболический тангенс*.

Нетрудно проверить, что справедливы соотношения:

$ch^2x-sh^2x=1$; $ch^2x+sh^2x=ch(2x)$; $sh(2x)=2shx\cdot chx$;

$(chx)'=shx$; $(shx)'=chx$.

Глядя на эти равенства, нетрудно догадаться, какую подстановку нужно использовать при вычислении интеграла с квадратичной иррациональностью.

При этом, если $x=sht$, то $dx=cht\cdot dt$ и $t=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

Пример 6. $\int\sqrt{9+x^2}dx.$

Решение. Поскольку $ch^2t=sh^2t+1$, положим $x=3sht$, тогда $t=\ln(x/3+\frac{1}{3}\sqrt{x^2+9})$, $dx=3cht\cdot dt$ и, следовательно,

$$\int\sqrt{9+x^2}dx = \int\sqrt{9+9sh^2t}\cdot 3chtdt = 9\int ch^2t\cdot dt = 9\int\frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}dt$$

$$=9\frac{e^{2t}-e^{-3t}}{8}+\frac{9}{2}t+C=$$

$$=\frac{9}{4}sh(2t)+\frac{9}{2}\cdot t+C=\frac{9}{2}sht\cdot cht+\frac{9}{2}\cdot t+C=\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\cdot\ln(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{x^2+9})+C$$

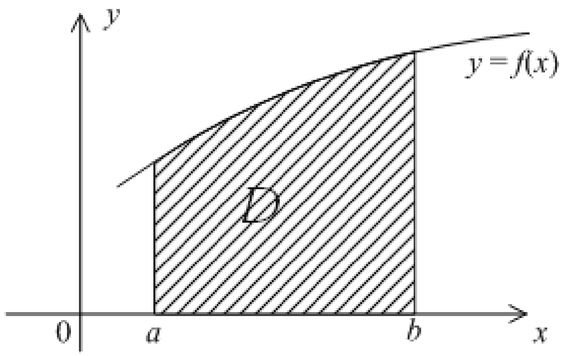
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+9})+C_1.$$

2. Определенный интеграл

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Задача о нахождении площади криволинейной трапеции

1. Рассмотрим *криволинейную трапецию D*, ограниченную отрезком $[a,b]$ оси Ox, графиком непрерывной функции $y=f(x)>0$, заданной на отрезке $[a,b]$, и вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$.



Задача о нахождении площади криволинейной трапеции D приводит к понятию «определенный интеграл», который обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. При этом площадь криволинейной трапеции D равна $S(D)=\int\limits_a^b f(x)dx$. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Задача о нахождении работы переменной силы

Пусть материальная точка перемещается под действием переменной силы $F=F(x)$ вдоль оси Ox. Вычисление *работы A* переменной силы по перемещению из точки $x=a$ в точку $x=b$ ($a<b$) сводится к вычислению определенного интеграла

$$A=\int\limits_a^b F(x)dx.$$

Задача о нахождении пути материальной точки при движении с переменной скоростью v(t)

Путь S материальной точки, пройденный за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ вычисляется с помощью определенного интеграла от абсолютной величины скорости

$$S = \int_a^b |\, v(t)\,|\, dt\,.$$

<u>*2.4 Задача о нахождении массы неоднородного стержня*</u>

Масса m неоднородного стержня плотности $\rho = \rho(x)$ на отрезке $[a,b]$ сводится к вычислению определенного интеграла

$$m = \int_a^b \rho(x)dx\,.$$

Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx\,.$$

2. Интеграл от суммы конечного числа слагаемых равен сумме интегралов от каждого слагаемого

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx\,.$$

Из 1 и 2 следует, что для любых постоянных C_1 и C_2

$$\int_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x))dx = C_1\int_a^b f_1(x)dx + C_2\int_a^b f_2(x)dx\,.$$

Последнее равенство называют свойством *линейности* определённого интеграла.

3. Свойство аддитивности.

Для любых трех чисел a,b,c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,,$$

если все эти интегралы существуют.

4. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

5. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$.

6. Интегрирование неравенств.

Если на отрезке $[a,b]$ выполнено неравенство $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

В частности, если $f(x) \ge 0$, $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Отметим еще одно полезное неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

7. Теорема об оценке.

Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции *f(x)* на отрезке [a,b], то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

8. Теорема о среднем.

Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [a,b], то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

9. Теорема о производной определенного интеграла по верхнему пределу.

Если *f(x)* – непрерывная функция и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$ то

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Отсюда следует, что всякая непрерывная функция имеет первообразную.

Непосредственное интегрирование по формуле Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона – Лейбница. Если *F(x)* является первообразной непрерывной функции *f(x)*, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Правая часть обозначается $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ и формула *Ньютона – Лейбница* записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

<u>*Пример*</u> 1. $\int_1^2 \frac{x+4}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2}dx = \ln|x|\Big|_1^2 - \frac{4}{x}\Big|_1^2 = \ln 2 - (\frac{4}{2} - \frac{4}{1})$
$= \ln 2 + 2$

<u>*Пример*</u> 2.
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

<u>*Пример*</u> 3. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\sin x dx =$

$$= -\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)d(\cos x) = (-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3})\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

Замена переменной в определенном интеграле

<u>*Теорема.*</u> Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a*,*b*], функция φ(*t*) непрерывна и имеет непрерывную производную φ′(*t*) на отрезке $[\alpha, \beta]$, где *a = φ(α), b = φ(β),* а также множество значений функции φ(*t*) при $t \in [\alpha, \beta]$ принадлежит отрезку [*a*,*b*], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

<u>*Пример*</u> 4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^2 \frac{2x+5}{\sqrt{x+2}}dx$.

<u>*Решение*</u>. Сделаем замену $t = \sqrt{x+2},$ откуда $x = t^2 - 2,\ x' = 2t$. Новые пределы интегрирования $\alpha = \sqrt{-1+2} = 1,\ \beta = \sqrt{2+2} = 2$. Тогда $\int_{-1}^2 \frac{2x+5}{\sqrt{x+2}}dx =$
$\int_1^2 \frac{(2t^2+1)2t}{t}dt =$

$$= 2\int_1^2 (2t^2+1)dt = \left(\frac{4}{3}t^3 + 2t\right)\Big|_1^2 = \frac{32}{3} - \frac{4}{3} + (4-2) = \frac{34}{3}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема. Если функции *u(x)* и *v(x)* непрерывны вместе со своими производными на отрезке [*a,b*], то

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям* для определенного интеграла.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$.

Решение. Пусть *u = x*, *dv = sinx dx*. Тогда *du = dx, v = -cosx..*

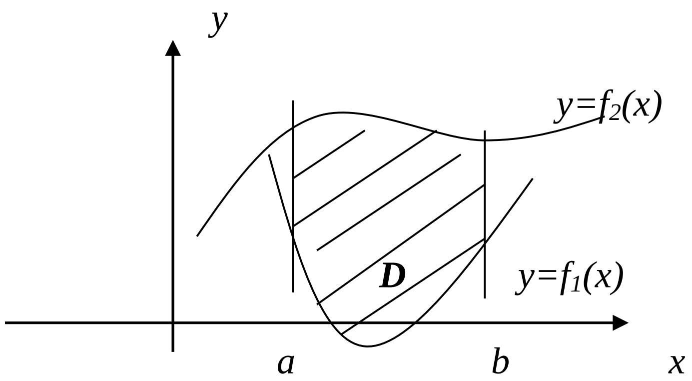
$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Пример 6. $\int_0^1 arctgx\,dx = x\,arctgx\Big|_0^1 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$. Здесь *u = x, v = arctgx.*

Вычисление площадей, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах

Рассмотрим *плоскую область* *D*, ограниченную графиками непрерывных функций $y = f_1(x),\ \ y = f_2(x),\ \ f_1(x) \le f_2(x)$, заданными на отрезке [*a,b*] , и вертикальными прямыми *x = a* и *x = b* (см. рис.). Требуется найти площадь *области* D.



Эту площадь можно найти по формуле

$$S(D)=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx.$$

<u>*Пример*</u> 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=-x$ и $y=2x-x^2$.

<u>*Решение*</u>.

Найдем абсциссы точек пересечения указанных графиков, то есть корни уравнения $2x-x^2=-x$, $-x^2+3x=0$. Эти корни $x_1=a=0$, $x_2=b=3$ определяют пределы интегрирования. Так как на интервале [0,3] прямая $y=-x$ проходит ниже параболы $y=2x-x^2$, то

$$S=\int_0^3(2x-x^2-(-x))dx=\int_0^3(3x-x^2)dx=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{9}{2}.$$

Вычисление площадей, ограниченных кривыми, заданных параметрически

Рассмотрим *криволинейную трапецию D*, ограниченную отрезком $[a,b]$ оси Ox, вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$, графиком неотрицательной непрерывной функции, заданной параметрически

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}\quad \text{при } t\in[\alpha,\beta].$$

2. Здесь α и β определяются из равенств $a=x(\alpha)$, $b=x(\beta)$, а функция при $x=x(t)$ имеет непрерывную неотрицательную производную $x'(t)$ при $t\in[\alpha,\beta]$

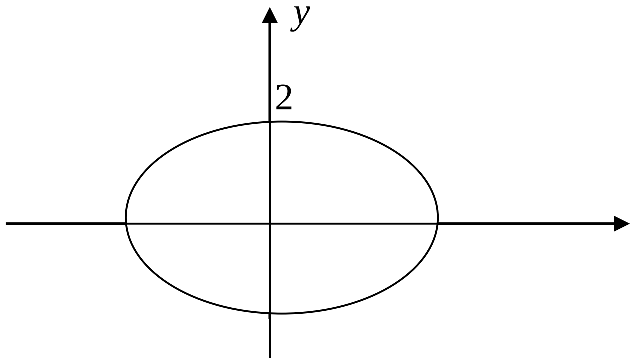
Тогда площадь *криволинейной трапеции D* находится по формуле

$$S(D)=\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)dt.$$

<u>*Пример*</u> 2. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.

<u>*Решение*</u>. Перейдем к параметрической записи

$x=5\cos t$, $y=2\sin t$, $t\in[0,2\pi]$. Ограничимся вычислением площади верхней половины. Здесь x меняется от (-5) до 5, следовательно, t меняется от π до 0.



x

-5 5

-2

$$\frac{1}{2}S = \int_{\pi}^{0} 2\sin t \cdot (5\cos t)' dt = 5\int_{0}^{\pi} 2\sin^2 t dt = 5\int_{0}^{\pi} (1-\cos 2t) dt = 5\pi .$$

Следовательно, $S = 10\pi$.

Вычисление площадей в полярных координатах

Напомним, что полярными координатами точки M является пара чисел (ρ,φ), где $\rho > 0$ - длина отрезка MO – полярный радиус, φ , $\varphi \in [0,2\pi]$, -угол между MO и полярной осью. Положительным направлением полярного угла φ будем считать его изменение против часовой стрелки. Если совместить начало декартовой системы координат с полюсом, а положительную полуось Ox – с полярной осью, то связь между полярными и декартовыми координатами точки M выражается с помощью формул $x = \rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$,
и, следовательно,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

Вычисление площади криволинейного сектора.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного дугой кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi .$$

Если область на плоскости ограничена дугами кривых, уравнения которых заданы в полярных координатах в виде $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$), и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, то площадь такой области (как разность площадей криволинейных секторов, ограниченных кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$) определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (\rho_2{}^2 - \rho_1^2) d\varphi .$$

<u>Пример</u> 3. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$, $\varphi \in [0,2\pi]$.

Решение. Вычислим площадь четверти данной фигуры, лежащей в первой четверти, т.е. $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 9\cos 2\varphi \cdot d\varphi = \frac{9}{4}\sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = \frac{9}{4}.$$ Следовательно, $S = 9$.

Вычисление объема тела через площади его сечений

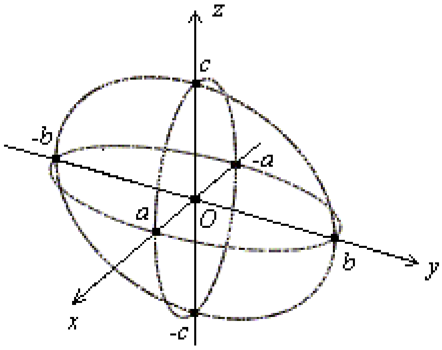
Пусть имеется некоторое тело, для которого известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*, являющаяся функцией от *x*: $Q = Q(x)$. Объем рассматриваемого тела в предположении, что Q – непрерывная функция, равен определенному интегралу

$$v = \int_a^b Q(x)dx.$$

Пример 1. Найти объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$.

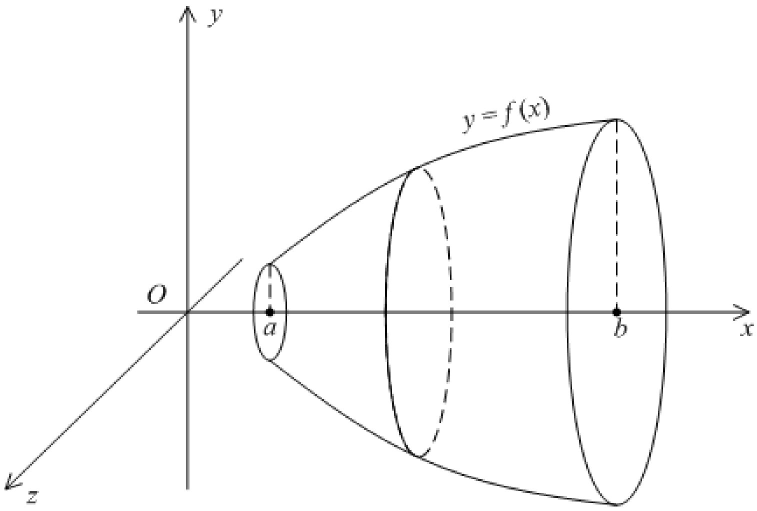


Решение. При $x = \text{const}$ сечениями будут эллипсы $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 - \frac{x^2}{4}$ с площадью $Q(x) = 15\pi\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$. Тогда объем эллипсоида

$$V = 15\pi\int_{-2}^{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dx = 15\pi\left(x - \frac{1}{12}x^3\right)\Big|_{-2}^{2} = 40\pi.$$

Вычисление объема тела вращения

Пусть требуется определить объем *тела вращения,*



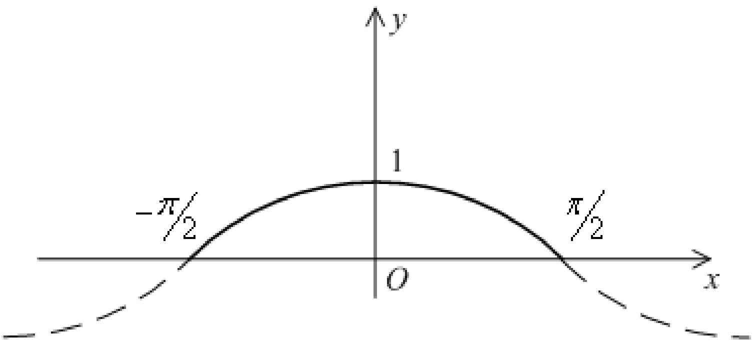
образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной частью графика функции $y = f(x)$ от $x = a$ до $x = b$, отрезками прямых $x = a,\ x = b$ и осью $y = 0$. Площадь сечения такого тела плоскостью x = const равна $Q(x) = \pi y^2 = \pi(f(x))^2$, и формула вычисления объема в этом случае имеет вид

$$v = \pi\int_a^b y^2 dx \ = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx \quad .$$

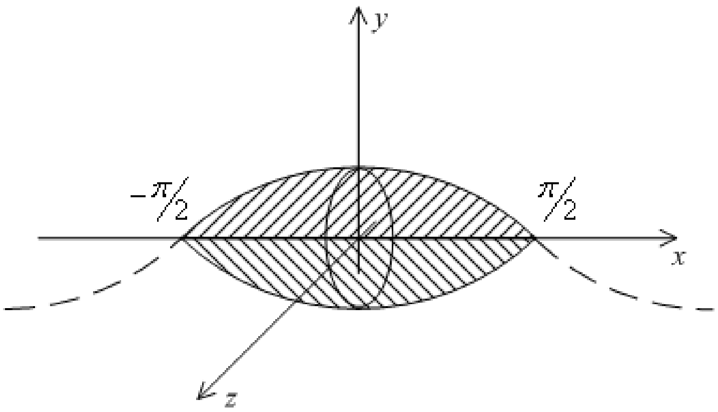
Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c,\ y = d$ и $x = 0$, вычисляется по формуле

$$v = \pi\int_c^d x^2 dy \ = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy \quad .$$

<u>*Пример*</u> 2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = \cos x$ и прямой $y = 0$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



<u>*Решение*</u>. При вращении кривой $y=\frac{3}{2}\cos x$ вокруг оси *Ox* возникает тело вращения



Найдём объём этого тела вращения.

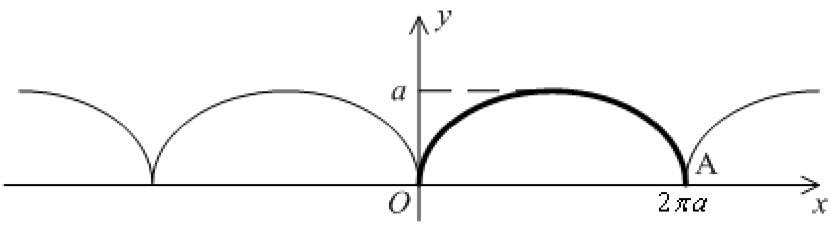
$$v=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^2dx \quad =\frac{9\pi}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)^2dx= \quad =\frac{9\pi}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{9\pi}{8}(x+\frac{1}{2}\sin\, 2x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{9\pi^2}{8}\ .$$

<u>*Пример*</u> 3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной одной аркой *циклоиды*, заданной на плоскости xOy параметрическими уравнениями

$$x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ a>0\ ,$$

лежащей между точками $O(0,0)$ (соответствует $t=0$) и $A(2\pi a,0)$ (соответствует $t=2\pi$).



<u>*Решение*</u>. $$v=\pi\int_0^{2\pi a} y^2dx \quad =\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 ad(t-\sin\, t)=$$

$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt$. Этот интеграл предлагается вычислить самостоятельно.

<u>*Ответ*</u>: $V=5\pi^2a^3$.

Вычисление площади поверхности вращения

Пусть требуется определить площадь поверхности ***вращения***, образованной вращением вокруг оси *Ox* кривой $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, от $x = a$ до $x = b$.

Формула для площади поверхности вращения имеет вид

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

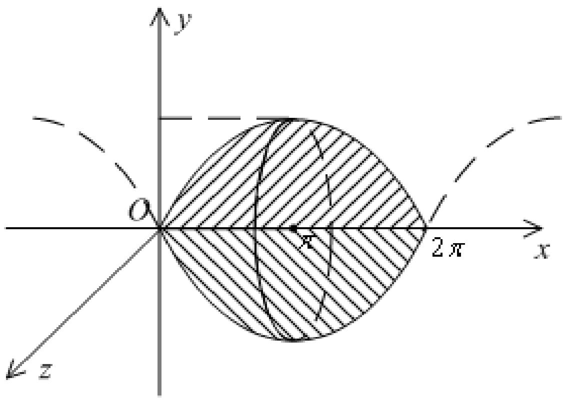
Если кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{при } t \in [\alpha, \beta],$$

то площадь поверхности вращения примет вид

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

<u>*Пример*</u> 4. Найти площадь поверхности вращения, полученной при вращении дуги циклоиды $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, вокруг оси Ox.



<u>*Решение*</u>. Имеем $x' = 1 - \cos t,\ y' = \sin t$ и, следовательно,

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2}\,dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{(2 - 2\cos t)}\,dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t) 2\sin(t/2)\, dt = \frac{64\pi}{3}.$$

Указание. Для вычисления интеграла воспользоваться формулой

$$\sin\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x)$$

Вычисление длины дуги с помощью определенного интеграла

Длина дуги в декартовых координатах.

Рассмотрим функцию *y = f(x),* непрерывную на отрезке [*a,b*] вместе со своей производной. Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, то формула для вычисления длины дуги имеет вид

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Длина дуги кривой, заданной в параметрической форме.

Если кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{при } t \in [\alpha, \beta],$$

x(t) и *y(t)* – непрерывные функции с непрерывными производными, то длина дуги вычисляется по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

Если пространственная линия задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,dt.$$

Длина дуги в полярных координатах.

Если кривая задана в полярных координатах

$\rho = \rho(\varphi),\ \ \alpha \le \varphi \le \beta$,

то длина дуги вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

Пример 5. Найти длину дуги полукубической параболы $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $0\le x\le 3$.

Решение. Имеем $y'=\sqrt{x}$ и, следовательно,

$$l=\int\limits_0^3\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int\limits_0^3\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^3=\frac{14}{3}.$$

Пример 6. Найти длину дуги одной арки циклоиды $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$, $0\le t\le 2\pi$.

Решение. Имеем $x'=1-\cos t,\ y'=\sin t$ и, следовательно,

$$L=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(2-2\cos t)}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}2\,|\sin(t/2)|\,dt=\int\limits_0^{2\pi}2\sin(t/2)\,dt=8.$$

Пример 7. Найти длину дуги кардиоиды $\rho=1+\cos\varphi$.

Решение. Имеем $\rho=1+\cos\varphi,\ \rho'=-\sin\varphi$ и, следовательно,

$$L=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+(\sin\varphi)^2}\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(2+2\cos\varphi)}\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}2\,|\cos(\varphi/2)|\,d\varphi=2\int\limits_0^{\pi}2\cos(\varphi/2)\,d\varphi=8\sin(\varphi/2)\Big|_0^{\pi}=8.$$

Приложения определенного интеграла в механике и физике

Работа переменной силы

Пусть материальная точка перемещается под действием переменной силы $F=F(x)$ вдоль оси *Ox*. Р*абота A* переменной силы по перемещению из точки $x=a$ в точку $x=b$ ($a<b$) вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)dx\,.$$

Пример 1. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять тело массы m с уровня h от поверхности Земли на высоту H?

<u>*Решение*</u>. Будем рассматривать тело как материальную точку. Тело перемещается, преодолевая действие переменной силы тяготения $F = \gamma\dfrac{mM}{x^2}$, где *x* – расстояние до центра Земли. Пусть радиус Земли равен *R*. $A = \int\limits_{R+h}^{R+H} \gamma\dfrac{Mm}{x^2}dx = -\gamma\dfrac{mM}{x}\Bigg|_{R+h}^{R+H}$

$= \gamma mM(\dfrac{1}{R+h} - \dfrac{1}{R+H})$ На поверхности Земли $mg = \gamma\dfrac{mM}{R^2}$ и, следовательно,

$$A = \frac{\gamma mM}{R^2}R^2(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R+H}) = mg(\frac{H-h}{(R+h)(R+H)})R^2 =$$

$$= mg(\frac{H-h}{(1+\frac{h}{R})(1+\frac{H}{R})})\,.$$

Пример 2. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 3 см, если сила в 10 Н растягивает ее на 1 см? Считать, что для таких растяжений справедлив закон Гука. Решение. По закону Гука $F = kx$ где k – коэффициент пропорциональности. По условию $10H = k\cdot 0{,}01м$.

$$A = \int_0^{0,03} kxdx = k\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,03} = \frac{10^3}{2}\cdot 9\cdot 10^{-4}(Дж) = 4{,}5\cdot 10^{-1}(Дж)$$

Путь и перемещение при движении с переменной скоростью

Пусть материальная точка движется вдоль прямой с переменной скоростью *v(t)*. Путь *S*, пройденный за промежуток времени от $t = t_0$ до $t = t_1$, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_0}^{t_1} |\,v(t)\,|\,dt\,.$$

Если x_0 - координата точки в момент времени $t = t_0$, x_1 - координата в момент времени $t = t_1$, то

$$x_1 = x_o + \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt\,.$$

<u>Пример</u> 3. Пусть материальная точка движется вдоль прямой с переменной скоростью (гармонические колебания)

$$v(t) = \frac{2\pi}{T}\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi),$$

где T - период, φ - начальная фаза.

Пусть $\varphi = 0$ и в момент времени $t_0 = 0$ координата точки $x_0 = 0$. Найти координату точки в момент времени t_1 и путь, пройденный к этому моменту: а) $t_1 = \frac{1}{4}T$; б) $t_1 = \frac{1}{2}T$.

<u>Решение</u>. Обозначим $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Тогда имеем

$$x_1 = x_o + \omega\int_{t_0}^{t_1}\cos(\omega t)dt = \sin(\omega t)\Big|_0^{t_1} = \sin(\omega t_1).$$

а) $x_1 = \sin(\omega(T/4)) = = \sin(\pi/2) = 1$;

б) $x_1 = \sin(\omega(T/2)) = \sin(\pi) = 0 = x_0$, т. е. за половину периода точка возвращается в исходное положение.

Вычислим теперь пройденный путь.

$$S = \int_{t_0}^{t_1}|\,v(t)\,|\,dt = \omega\int_0^{t_1}|\cos(\omega t)\,|\,dt = \int_0^{\omega t_1}|\cos(s)\,|\,ds.$$

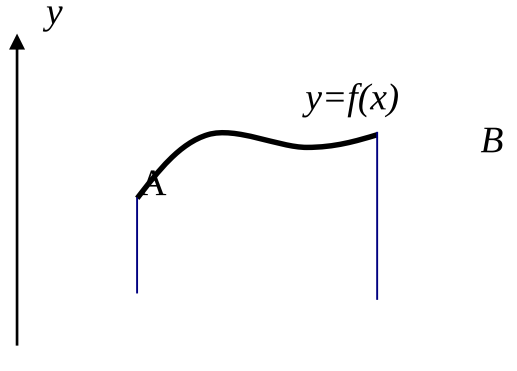
а) $S = \int_0^{\pi/2}|\cos(s)\,|\,ds = \int_0^{\pi/2}\cos(s)ds = 1$;

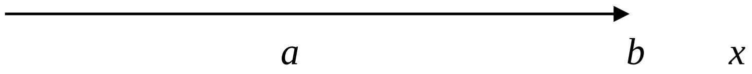
б) $S = \int_0^{\pi}|\cos(s)\,|\,ds = 2\int_0^{\pi/2}\cos(s)ds = 2$.

Вычисление статических моментов и центра масс

Статические моменты и центр тяжести плоской кривой

Пусть однородная дуга *L=AB* с линейной плотностью $\rho = const$ задана графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$ на отрезке [*a*,*b*].





Статические моменты M_x и M_y кривой *AB* относительно осей *Ox* и *Oy* вычисляются по формулам

$$M_x = \rho\int_a^b y ds = \rho\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx = \rho\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx;$$

$$M_y = \rho\int_a^b x ds = \rho\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}dx = \rho\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Масса дуги *L*=*AB* с линейной плотностью $\rho = const$ определяется по формуле

$$M = \rho\int_a^b ds = \rho\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx = \rho\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Координаты *центра тяжести* (*центра масс*)

$$x_C = \frac{M_y}{M}, \; y_C = \frac{M_x}{M}.$$

Если рассматриваемая дуга *L* *симметрична* относительно некоторой прямой, то центр тяжести *лежит на этой прямой*.

М*оменты инерции* I_x и I_y кривой *L* относительно осей *Ox* и *Oy* вычисляются по формулам

$$I_x = \rho\int_a^b y^2 ds = \rho\int_a^b y^2\sqrt{1+(y')^2}dx;$$

$$I_y = \rho\int_a^b x^2 ds = \rho\int_a^b x^2\sqrt{1+(y')^2}dx.$$

Замечание. Если кривая *L* задана *параметрически*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{при } t \in [\alpha, \beta],$$

то во всех приведенных выше формулах дифференциал дуги

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Например, формула для массы примет вид

$$M=\rho\int_a^b ds=\rho\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

<u>*Пример*</u> 4. Найти статические моменты M_x, M_y, центр тяжести и моменты инерции I_x и I_y однородной ($\rho=1$) дуги четверти окружности $x^2+y^2=R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

<u>*Решение*</u>. Перейдем к параметрической записи уравнения дуги четверти окружности

$$x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

В данном случае $ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=Rdt$ и, следовательно,

$$M_x=\int_0^R yds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin tRdt=-R^2\cos t\Big|_0^{\pi/2}=R^2;$$

$$M_y=\int_0^R xds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos tRdt=R^2\sin t\Big|_0^{\pi/2}=R^2;$$

$$M=\int_0^R ds=R\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt=\frac{\pi R}{2}$$

Координаты *центра масс*

$$x_C=\frac{M_y}{M}=\frac{2R}{\pi},\quad y_C=\frac{M_x}{M}=\frac{2R}{\pi}.$$

М*оменты инерции* I_x и I_y четверти окружности относительно осей Ox и Oy

$$I_x=\rho\int_a^b y^2ds$$

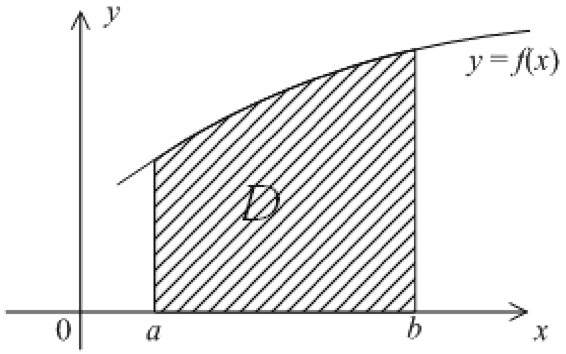
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin^2 tRdt=\frac{R^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=\frac{R^3}{2}(t-\frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi R^3}{4};$$

$$I_y=\rho\int_a^b x^2ds$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2 tRdt=\frac{R^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{R^3}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi R^3}{4}.$$

Статические моменты и центр тяжести плоской фигуры

Рассмотрим плоскую пластину, имеющую вид *криволинейной трапеции* D. Она ограничена отрезком $[a,b]$ оси Ox, графиком непрерывной функции $y = f(x) > 0$, заданной на отрезке $[a,b]$, и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.



Будем считать, что на пластине D распределена масса с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x)$.

Статические моменты M_x и M_y пластины D относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho \cdot y^2 dx = \frac{1}{2}\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx;$$

$$M_y = \int_a^b \rho \cdot x \cdot y dx = \int_a^b \rho(x) \cdot x \cdot f(x) dx.$$

Масса M пластины D определяется по формуле

$$M = \int_a^b \rho \cdot y dx = \int_a^b \rho(x) \cdot f(x) dx.$$

Координаты *центра масс*

$$x_C = \frac{M_y}{M}, \; y_C = \frac{M_x}{M}.$$

М*оменты инерции* I_x и I_y пластины D относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \rho \cdot y^3 dx = \frac{1}{3}\int_a^b \rho(x) f^3(x) dx;$$

$$I_y = \int_a^b \rho \cdot x^2 \cdot y dx = \int_a^b \rho(x) \cdot x^2 \cdot f(x) dx.$$

<u>*Пример*</u> 5. Найти статические моменты M_x, M_y и центр тяжести однородной ($\rho = 1$) пластины D, имеющей вид «четверти эллипса»

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

<u>*Решение*</u>. Перейдем к параметрической записи уравнения четверти эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. При изменении *x* от *0* до *a* пределы интегрирования по переменной *t* меняются от $\frac{\pi}{2}$ до *0*. Статические моменты M_x и M_y пластины D относительно осей *Ox* и *Oy*:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho \cdot y^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^2 \sin^2 t \cdot a(-\sin t)dt = \frac{ab^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\cos^2 t)\cdot d(\cos t)$$

$$= \frac{ab^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\cos^2 t)\cdot d(\cos t) = \frac{ab^2}{3};$$

$$M_y = \int_a^b \rho \cdot x \cdot y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\cos t \cdot b\sin t \cdot a \cdot (-\sin t)dt = -ba^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t \cdot d(\sin t)$$

$$= \frac{a^2 b}{3}$$

Масса M пластины D определяется по формуле

$$M = \int_a^b \rho \cdot y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot (-a\sin t)dt = \frac{\pi ab}{4}.$$

Координаты *центра масс*

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{4a}{3\pi}, \qquad y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{4b}{3\pi}.$$

Приложение к задачам в электротехнике

Вычисление энергии, тока и напряжения

Пусть через участок электрической цепи проходит электрический заряд. Скорость поступления в цепь электрической энергии $W(t)$ в момент времени t представляет собой *мгновенную мощность* $p(t) = W'(t)$.

При заданной мощности $p(t)$ энергия, поступающая в приемник за промежуток времени от $t = t_0$ до $t = t_1$, вычисляется по формуле

$$W = \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt.$$

Пример 6. Найти энергию, поступающую в приемник за промежуток времени от 0 до t, если мгновенная мощность

$p(t) = A\cos\varphi + A\cos(2\omega t - \varphi)$, где амплитуда A, фаза φ, частота ω предполагаются постоянными.

Решение.
$$W = \int_0^t p(s)ds = \int_0^t (A\cos\varphi + A\cos(2\omega s - \varphi))ds =$$

$$\left\{(A\cos\varphi)s + \frac{A}{2\omega}\sin(2\omega s - \varphi)\right\}\Bigg|_0^t = (A\cos\varphi)t + \frac{A}{2\omega}\sin(2\omega t - \varphi) + \frac{A}{2\omega}\sin\varphi.$$

Напряжение на элементе электрической цепи – индуктивности – определяется по формуле

$$U_L = L\frac{di}{dt},$$

где $i = i(t)$ - ток в цепи, L – индуктивность.

При заданном напряжении U_L ток в индуктивности равен

$$i = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t U_L(s)ds,$$

где $i(0)$ - значение тока в начальный момент времени.

Пример 7. Найти ток на индуктивности, если напряжение на индуктивности $U_L = L(-a)e^{-at}$, где L – индуктивность, a – постоянная, $i(0) = 1$.

Решение. *Напряжение* на элементе электрической цепи – индуктивности – определяется по следующей формуле

$$U_L = L\frac{di}{dt},$$

где $i = i(t)$ - ток в цепи, L – индуктивность. Отсюда

$$i = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t U_L(s)ds = 1 - \frac{La}{L}\int_0^t e^{-as}ds = e^{-at}.$$

Ток на элементе электрической цепи – *ёмкости* – определяется по формуле

$$i = C\frac{dU_C}{dt},$$

где $i = i(t)$ - ток в цепи, C – ёмкость, U_C - напряжение на ёмкости.

При заданном токе напряжение на ёмкости

$$U_C = U_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)ds,$$

где $U_C(0)$ - значение напряжения в начальный момент времени.

Простейшие дифференциальные уравнения и их решение

Пример 8. Материальная точка массы m свободно падает под действием силы тяжести $F=mg$. Найти закон движения точки (без учета сопротивления воздуха), если заданы положение $S_0 = S(0)$ и скорость $v_0 = v(0)$ в начальный момент времени $t=0$.

Решение. Поскольку ускорение является второй производной от перемещения $g = a(t) = S''(t)$, то получаем уравнение вида $S''(t) = g$, которое является простейшим дифференциальным уравнением второго порядка.

Задача сводится к нахождению функции по заданной второй производной. Проинтегрировав обе части уравнения $S''(t) = g$ дважды, получим

$S(t) = g\dfrac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$, где C_1, C_2 - некоторые произвольные постоянные.

Эти постоянные определим из заданных начальных условий: $C_2 = S(0) = S_0$ - положение точки в начальный момент времени, $C_1 = S'(0) = v(0) = v_0$ - начальная скорость. Окончательно получим

$$S(t) = g\frac{t^2}{2} + v_0 t + S_0.$$

Пример 9. *Переходный процесс в линейной электрической цепи.*

Пусть линейная электрическая цепи, состоящая из последовательно соединенных элементов – сопротивления r и индуктивности L – присоединяется к источнику э.д.с. $E(t) = E$. Описать переходный процесс (значение тока в начальный момент времени $i(0) = 0$).

Решение. Переходный процесс в данной электрической цепи на основании второго закона Кирхгофа описывается уравнением

$$U_r + U_L = E(t).$$

Поскольку $U_r = r \cdot i$, а $U_L = L\dfrac{di}{dt}$, получаем уравнение

$$ri + L\frac{di}{dt} = E(t).$$

Мы пришли к дифференциальному уравнению первого порядка. Методы решения таких уравнений будут изучаться позднее. Покажем, как это уравнение можно решить с помощью непосредственного интегрирования. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{r}{L}i + \frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$$

и для удобства обозначим $k = \dfrac{r}{L}$ $\quad m = m(t) == \dfrac{E(t)}{L}$. В новых обозначениях

$$k \cdot i + \frac{di}{dt} = m(t).$$

Домножим это уравнение на e^{kt} :

$$e^{kt}k \cdot i + \frac{di}{dt}e^{kt} = m(t)e^{kt}.$$

Поскольку $e^{kt}k \cdot i + \dfrac{di}{dt}e^{kt} = (i \cdot e^{kt})'$, то приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt}(i \cdot e^{kt}) = m(t)e^{kt}.$$

Интегрируя, получим

$$(i \cdot e^{kt}) = \frac{1}{L}\int_0^t E(t) \cdot e^{ks}ds + C.$$

Поскольку значение тока в начальный момент времени $i(0) = 0$, то $C = 0$ и, следовательно,

$$i(t) = \frac{e^{-kt}}{L}\int_0^t E(t) \cdot e^{ks}ds.$$

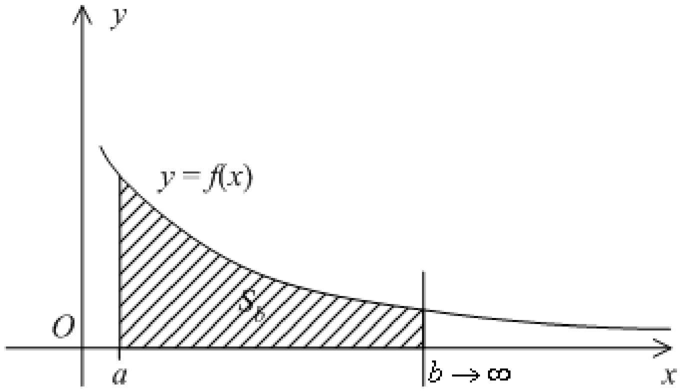
В случае постоянной э.д.с. $E(t) = E = const$.

$$i(t) = \frac{e^{-kt}}{L}\int_0^t E \cdot e^{ks}ds = \frac{Ee^{-kt}}{Lk}(e^{kt} - 1)\ ) = \frac{E}{r} - \frac{E}{r}\exp(\frac{-r}{L}t).$$

3. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы 1-го рода)

<u>*Определение*</u>. Пусть функция *f(x)* определена при $x \geq a$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$, где $b \in [a,+\infty]$.. Тогда интеграл $\int_a^b f(x)dx$ имеет смысл при любом $b > a$ и является функцией аргумента *b*.



<u>*Определение*</u>. Если существует конечный предел

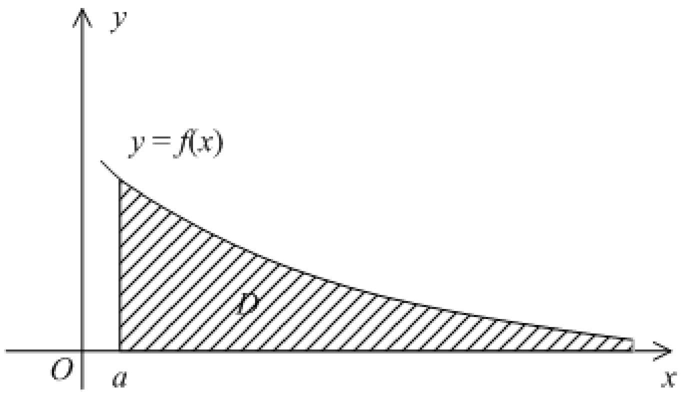
$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

то его называют *несобственным интегралом 1-го рода* от функции *f(x)* на интервале $[a,+\infty)$ и обозначают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

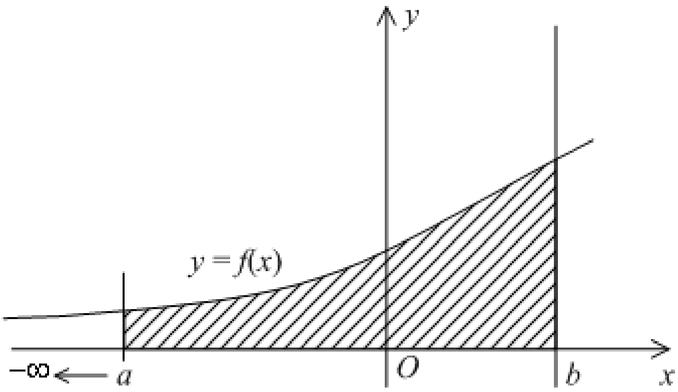
При этом говорят, что несобственный интеграл *существует* или *сходится*. Если же не существует конечного предела, несобственный интеграл *не существует* или *расходится*.

Если $f(x) \geq 0$ на интервале [*a*, +∞), то величина несобственного интеграла $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ является площадью неограниченной области, расположенной между графиком функции *y=f(x)* , прямой *x = a* и осью *Ox*.



Аналогично определяется *несобственный интеграл 1-го рода* от функции *f(x)* на интервале $(-\infty, b]$. Если функция *f(x)* интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$, где $-\infty < a < b$, то полагают

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$



Если функция *f(x)* интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$ числовой оси, то *несобственный интеграл 1-го рода* с двумя бесконечными пределами определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – произвольное число.

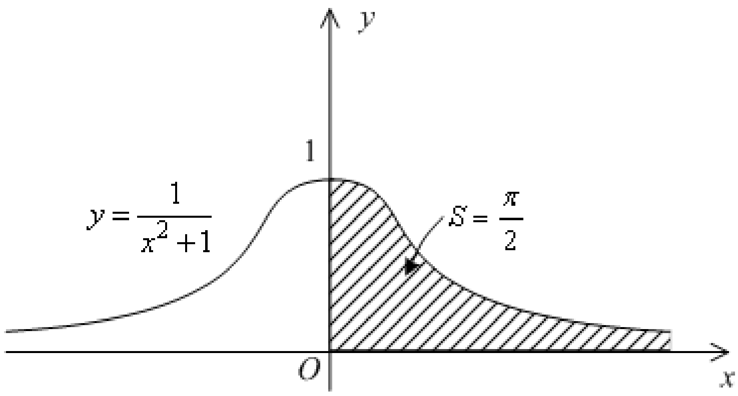
По определению интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ существует только в том случае, если сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства.

<u>*Пример*</u> 1. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

<u>*Решение*</u>. Это несобственный интеграл *1-го рода* с двумя бесконечными пределами, поэтому представим его в виде суммы $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$ $+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Вычислим сначала

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}(arctgb - arctg0) = \frac{\pi}{2}.$$



Аналогично

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}(arctg0-arctga)=\frac{\pi}{2}$$

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi\ .$$

Основные свойства несобственных интегралов с бесконечными пределами

1. Свойство *линейности.* Если несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ сходятся, то для любых постоянных C_1 и C_2

$$\int_a^{\infty}(C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x))dx=C_1\int_a^{\infty} f_1(x)dx+C_2\int_a^{\infty} f_2(x)dx\ .$$

2. *Формула Ньютона – Лейбница*. Если *f(x)* непрерывна при $x \geq a$, а *F(x)* - первообразная, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a),$$

где по определению

$$F(+\infty)=\lim_{b\to\infty}F(b)\ .$$

3. *Интегрирование по частям*.

Если функции *u(x)* и *v(x)* непрерывны вместе со своими производными и существует $\lim_{x\to\infty}u(x)\cdot v(x)$, то

$$\int_a^{+\infty}udv=uv\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}vdu\ ,$$

где

$$uv\Big|_{a}^{+\infty} = \lim_{x\to\infty} u(x)\cdot v(x) - u(a)\cdot v(a).$$

Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами

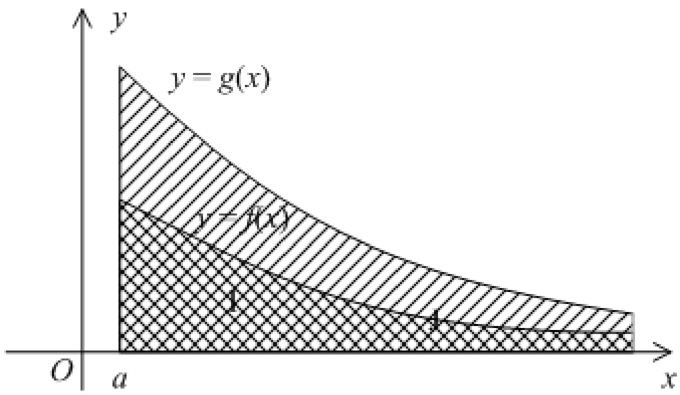
В ряде задач нужно только установить сходимость или расходимость несобственного интеграла.

<u>*Теорема*</u>. (***Признак сравнения***). Пусть $0 \le f(x) \le g(x)$ при $x \in [a,+\infty)$. Тогда:

1) если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;

2) если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ также расходится.

Этот признак имеет простую геометрическую интерпретацию: если конечна площадь под графиком большей функции $g(x)$, то конечна площадь под графиком меньшей функции $f(x)$.



Аналогичным образом интерпретируется второе утверждение.

<u>*Замечание*</u>**.** Признак сравнения остается верным, если неравенства $0 \le f(x) \le g(x)$ выполнены не для всех $x \in [a,+\infty)$, а начиная лишь с некоторого $A > a$, т.е. для $x \in [A,+\infty)$.

<u>*Пример*</u> 2. Исследовать на сходимость *интеграл Эйлера - Пуассона* $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Решение. Для сравнения выберем функцию $g(x)=e^{-x+1}$. Поскольку справедливо неравенство $-\frac{x^2}{2}\le -x+1$ и, следовательно, $0\le e^{-\frac{x^2}{2}}\le e^{-x+1}$, а интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x+1}dx=-e^{-x+1}\Big|_0^{+\infty}=e$$

сходится, то и исходный интеграл *Эйлера* - *Пуассона* также сходится.

Теорема. ***(Предельный признак сравнения).***

Пусть $f(x)\ge 0,\ \varphi(x)>0$ на $[a,\infty)$. Если существует конечный предел, не равный нулю,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=k,\ \ 0<k<+\infty,$$

то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

При $k=0$ из сходимости $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

При $k=\infty$ из расходимости $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

При применении признака сравнения удобно сравнивать подынтегральную функцию с функцией $\frac{1}{x^\alpha}$, α > 0, для которой сходимость или расходимость соответствующего несобственного интеграла легко установить непосредственно.

Пример 3. Исследовать на сходимость $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$, $a>0,$ в зависимости от параметра α.

Решение. Пусть $\alpha\ne 1,$ тогда

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=\begin{cases}+\infty(\alpha<1)\\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}(\alpha>1)\end{cases}$$

.

При $\alpha=1$

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\ln|x|\Big|_a^b\right)=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln a)=\infty.$$

Следствие. Интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

<u>Пример</u> 4. Исследовать на сходимость $\int_0^{\infty} \frac{2\sqrt{x} - \cos x}{x^3 + \sqrt{x^5} + 3\sin x + 5}\,dx$.

<u>Решение</u>. Поделим числитель и знаменатель на старшую степень знаменателя подынтегральной функции. При больших значениях x подынтегральная функция приблизительно равна

$$\frac{2x^{\frac{-5}{2}} - \cos x \cdot x^{-3}}{1 + x^{\frac{-1}{2}} + 3\sin x \cdot x^{-3} + 5x^{-3}} \approx \frac{2x^{\frac{-5}{2}}}{1}.$$

Поэтому в качестве функции сравнения возьмем функцию $\varphi(x) = \frac{2}{x^{5/2}}$. Проверим, что при $x \to \infty$ подынтегральная функция эквивалентна функции $\varphi(x) = \frac{2}{x^{5/2}}$. В самом деле:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2\sqrt{x} - \cos x)\cdot x^{5/2}}{(x^3 + \sqrt{x^5} + 3\sin x + 5)\cdot 2} = 1.$$

Таким образом, $\alpha = \frac{5}{2} > 1$, и по предельному признаку сравнения данный интеграл сходится.

<u>Пример</u> 5. Исследовать на сходимость $\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x + 5}\,dx$.

<u>Решение</u>. Наводящие соображения: функция $y = \ln x$ растет медленнее, чем функция $y = x$. Поэтому возьмем в качестве функции сравнения $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Имеем:

1) Интеграл $\int_2^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x}dx$ - расходится;

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x + 5} = \infty$.

Тогда в силу предельного признака сравнения получаем, что исходный интеграл также расходится.

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов 1-го рода

<u>Определение</u>. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называют *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} | f(x) | dx$ и *условно сходящимся*, если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} | f(x) | dx$ расходится.

Если интеграл абсолютно сходится, то функция *f(x)* называется *абсолютно интегрируемой* на [*a,*∞).

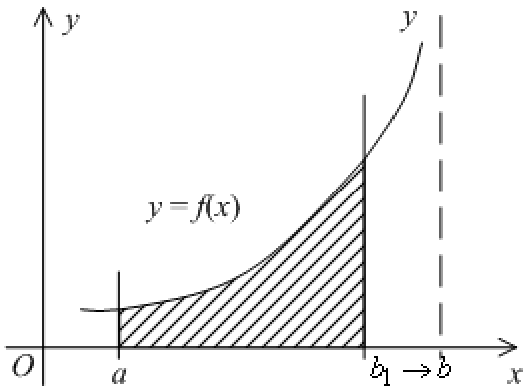
<u>Теорема.</u> Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ абсолютно сходится, то он сходится и в обычном смысле.

<u>Пример</u> 6. Исследовать на абсолютную сходимость $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^3+1} dx$.

<u>Решение</u>. Поскольку $\left| \frac{\cos x}{x^3+1} \right| \le \frac{1}{x^3+1}$, а интеграл $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$ сходится (почему?), то исходный интеграл сходится абсолютно.

Несобственные интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы 2-го рода)

<u>Определение.</u> Пусть функция *f(x)* определена на полуинтервале $[a,b)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,b_1]$, где $b_1 = b - \varepsilon \in [a,b)$, $\varepsilon > 0$, но не интегрируемая на отрезке $[a,b]$ (имеет разрыв при *x* = *b*).



<u>Определение</u>. Если существует конечный предел

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

то его называют *несобственным интегралом 2-го рода.*

При этом говорят, что несобственный интеграл *существует* или *сходится*. Если же не существует конечного предела, несобственный интеграл *не существует* или *расходится*.

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы от функции, имеющей разрыв при $x = a$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

Если функция *f(x)* имеет разрыв внутри отрезка $[a,b]$ в некоторой точке c ($a<c<b$), то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

По определению интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует только в том случае, если сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства.

<u>*Пример*</u> 1. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

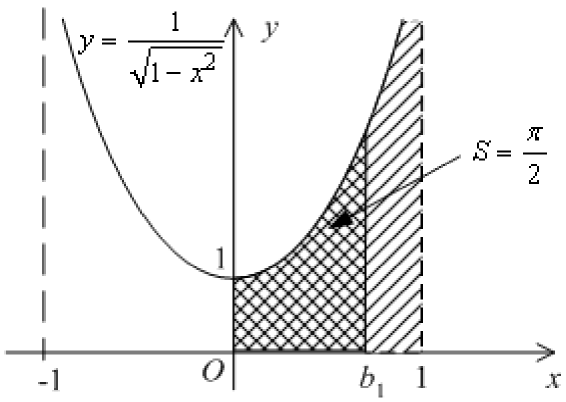
<u>*Решение*</u>. Подынтегральная функция на интервале $(-1,1)$ имеет два разрыва при $x=-1$ и при $x=1$. Поэтому представим исходный интеграл в виде суммы двух интегралов, в каждом из которых подынтегральная функция имеет ровно один разрыв:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} .$$

По определению

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b_1 \to 1} \int_{0}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2} .$$



Аналогично

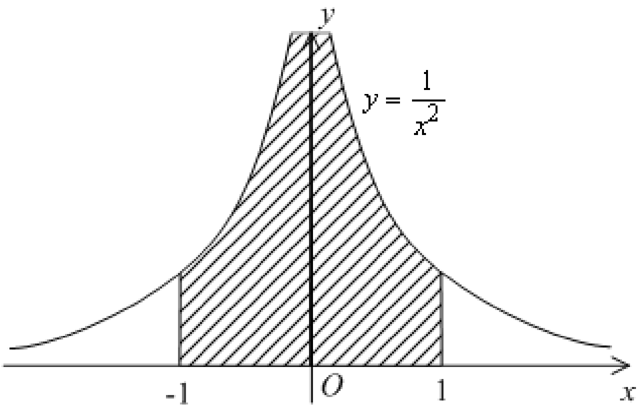
$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}==\lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin 0-\arcsin(-1+\varepsilon)=\frac{\pi}{2}$$

и, следовательно,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi .$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Решение. Подынтегральная функция на отрезке $[-1,1]$ интегрирования имеет один разрыв при $x=0$.



Поскольку функция *f(x)* имеет разрыв внутри отрезка $[-1,1]$ в точке $x=0$, то представим интеграл в виде суммы

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2} .$$

По определению интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ сходится только в том случае, если сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства. Так как

$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{-1}{x}\right|_{\varepsilon}^{1}=\infty$ расходится, то и исходный интеграл также расходится.

Замечание. Для несобственных интегралов 2-го рода справедливы те же свойства, что и для несобственных интегралов 1-го рода.

Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций

<u>*Теорема.*</u> ***(Признак сравнения)***. Пусть функции *f(x)* и *φ(x)* непрерывны при $a \le x < b$ и имеют разрыв при *x* = *b*. Если $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ при $x \in [a,b)$, то:

1) если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$;
2) если интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и $\int_a^b f(x)dx$.

<u>*Пример*</u> 3. Исследовать на сходимость *интеграл*

$$\int_0^1 \frac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}}dx.$$

<u>*Решение*</u>. Поскольку при $x \in (0,1]$ справедливо неравенство $0 < \frac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ и интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$ сходится, то и исходный интеграл также сходится.

<u>*Теорема.*</u> ***(Предельный признак сравнения).***

Пусть $f(x) \ge 0,\ \varphi(x) > 0$ на $[a,b)$. Если существует конечный предел, не равный нулю,

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty,$$

то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

При $k = 0$ из сходимости $\int_a^b \varphi(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$.

При $k = \infty$ из расходимости $\int_a^b \varphi(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

При применении признака сравнения удобно сравнивать подынтегральную функцию с функцией $\frac{1}{x^\alpha}$, α > 0, для которой сходимость или расходимость соответствующего несобственного интеграла легко установить непосредственно.

<u>*Пример*</u> 4. Исследовать на сходимость $\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}dx$ в зависимости от параметра α.

<u>*Решение*</u>. Пусть $\alpha \ne 1$, тогда

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^b x^{-\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{0+\varepsilon}^{b} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{\varepsilon^{1-a}}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} +\infty & (\alpha>1) \\ \dfrac{b^{1-\alpha}}{\alpha-1} & (\alpha<1)\end{cases}$$

При $\alpha = 1$

$$\int_0^b \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\ln|x|\Bigg|_{0+\varepsilon}^{b}\right) = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln(0+\varepsilon)) = \infty$$

.

<u>*Следствие*</u>. Интеграл

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}dx$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$.

<u>*Пример*</u> 5. Исследовать на сходимость $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+3x^2+5x}$.

<u>*Решение*</u>. Подынтегральная функция на промежутке $(0,1]$ интегрирования имеет разрыв при $x=0$. При малых x подынтегральная приблизительно равна

$$\frac{1}{x(x^2+3x+5)} \approx \frac{1}{5x}.$$

Поэтому в качестве функции сравнения возьмем функцию $\varphi(x) = \frac{1}{5x}$. Проверим, что при $x \to 0$ подынтегральная функция эквивалентна функции $\varphi(x) = \frac{1}{5x}$. В самом деле:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{x^2+3x+5} = 1.$$

Поскольку $\int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{5x}$ расходится ($\alpha = 1$), то по предельному признаку сравнения исходный интеграл расходится.

<u>*Пример*</u> 6. Исследовать на сходимость $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$.

<u>*Решение*</u>. Возьмем в качестве функции сравнения $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Имеем:

1) Интеграл $\int_0^{1/2}\varphi(x)dx = \int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ - сходится;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\ln x}=0$.

Тогда в силу предельного признака сравнения получаем, что исходный интеграл также сходится.

Абсолютная и условная сходимость для несобственных интегралов 2-го рода определяется так же как и для несобственных интегралов 1-го рода.

Пример 7. Исследовать на абсолютную сходимость $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin 2x}{x^3+\sqrt{x}}dx$.

Решение. Поскольку $\left|\dfrac{\sin 2x}{x^3+\sqrt{x}}\right| \le \dfrac{1}{x^3+\sqrt{x}}$, а интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^3+\sqrt{x}}dx$ сходится (почему?), то исходный интеграл сходится абсолютно.

4. Криволинейные и поверхностные интегралы

Криволинейные интегралы

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана векторная функция

$$\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}, \qquad (1)$$

т.е. каждому $t\in[a,b]$ сопоставляется вектор с началом в точке $(0,0,0)$, имеющий координаты $\bar{r}(t)=(x(t);y(t);z(t))$ (рис.1).

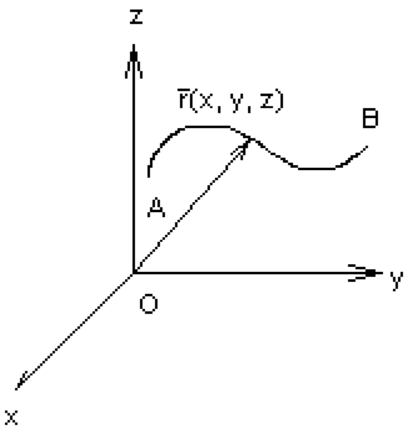


Рисунок 1

При изменении t от a до b конец вектора $\bar{r}(t)$ описывает некоторую линию (кривую) L от точки $A=(x(a),y(a),z(a))$ до точки $B=(x(b),y(b),z(b))$. Говорят, что такая пространственная линия L задана уравнением (1). В частности, при $z(t)=0$ мы получим уравнение плоской кривой: $\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}$. Задание кривой уравнением (1) определяет не только геометрическое место точек с координатами $(x(t),y(t),z(t))$, но и «порядок» точек на кривой: при возрастании t от a до b точка $(x(t),y(t),z(t))$ «пробегает» кривую от точки A до точки B.

Определение 1. Кривая L, на которой определен порядок «следования» точек, называется *ориентированной*, а выбранный порядок - *ориентацией*. У кривой может быть две ориентации.

Определение 2. *Касательной* к кривой L в точке M $\left(O\vec{M}=r(t)\right)$ называется предельное положение секущей $\overline{MM_1}=\bar{r}(t+\Delta t)-\bar{r}(t)$ при $\Delta t\to 0$, если оно существует (рис.2).

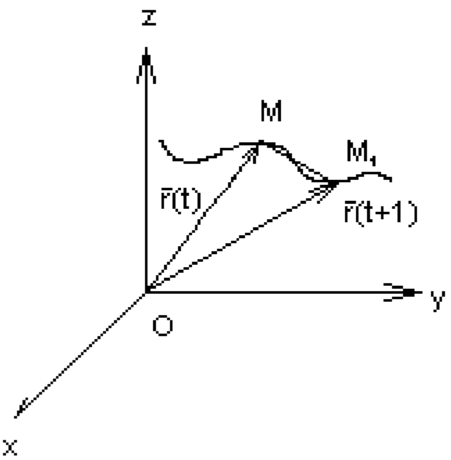


Рисунок 2

Производная от вектор-функции $\bar{r}(t)$ в точке t:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}.$$

Легко показать, что

$$\bar{r}'(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}.$$

<u>*Определение*</u> 3. Кривая L называется *гладкой*, если при любом $t \in [a,b]$ существуют и непрерывны производные $x'(t), y'(t), z'(t)$.

<u>*Определение*</u> 4. Кривая L называется *кусочно-гладкой*, если функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны, и отрезок $[a,b]$ можно разбить на конечное число подотрезков, на каждом из которых эти функции имеют непрерывные производные.

В дальнейшем мы будем рассматривать только гладкие или кусочно-гладкие кривые. Наглядно говоря, кривая, заданная уравнением (1), является гладкой при $t \in [a,b]$, если в каждой её точке существует касательная, «непрерывно» меняющаяся вдоль L.

Криволинейный интеграл 1-го рода (по длине дуги)

Пусть на кривой L задана функция $f(M)$. Разобьем кривую L на части L_k, $1 \le k \le n$, в каждой части выберем произвольную точку M_k. Затем умножим $f(M_k)$ на ΔS_k- длину части L_k, и все такие произведения просуммируем:

$$f(M_1)\Delta s_1 + \ldots + f(M_n)\Delta s_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k \tag{2}$$

Такая сумма называется <u>интегральной суммой</u>.

<u>*Определение*</u> 5. Криволинейным интегралом 1-го рода *(по длине дуги)* от функции $f(M)$ называется предел её интегральных сумм (2) при $\max\limits_k \Delta s_k \to 0$ при условии, что этот предел существует и не зависит от способа разбиения кривой L на части L_k и выбора на них точек M_k:

$$\lim_{\max\limits_k \Delta S_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k = \int_L f(M)ds \tag{3}$$

<u>*Теорема существования*</u>. Пусть функция *f(M)* определена и непрерывна на кривой *L*. Тогда криволинейный интеграл 1-го рода *(по длине дуги)* от функции $f(M)$ существует.

Основные свойства криволинейного интеграла 1-го рода

1) Значение криволинейного интеграла 1-го рода не зависит от выбора ориентации на кривой L.

2) Линейность.

$$\int_L (c_1 f_1(M) + c_2 f_2(M))ds = c_1 \int_L f_1(M)ds + c_2 \int_L f_2(M)ds,$$

где c_1, c_2 – постоянные.

3) Аддитивность. Если кривая $L = AB$ разбита на две части $L_1 = AC$ и $L_2 = CB$, то

$$\int_L f(M)ds = \int_{L_1} f(M)ds + \int_{L_2} f(M)ds.$$

4) Если на L выполнено неравенство $m_1 \le f(M) \le m_2$ и l – длина линии L, то $m_1 l \le \int_L f(M)ds \le m_2 l$.

5) Если $f(M)$ непрерывна на L, то

$$\int_L f(M)ds = f(M_0)l,$$

где M_0 – некоторая «средняя» точка на L (теорема о среднем).

Если $f(M) \equiv 1$, то

$$\int_L ds = l.$$

Последнее соотношение позволяет использовать криволинейный интеграл 1-го рода для нахождения длины дуги кривой.

Если $f(M) \ge 0$, то $f(M)$ можно интерпретировать как плотность, а интеграл $\int_L f(M)ds$ как массу.

Отметим также, что с помощью интеграла 1-го рода можно вычислять статические моменты кривой относительно осей координат, а также координаты ее центра тяжести. Приведем соответствующие формулы для плоской кривой.

Пусть $f(M) = f(x,y)$ - линейная плотность плоской кривой L. Тогда

1) масса кривой L

$$m = \int_L f(M)ds.$$

2) координаты центра тяжести

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_L xf(x,y)ds, \quad y_0 = \frac{1}{m}\int_L yf(x,y)ds.$$

3) моменты инерции соответственно относительно осей Ox, Oy и начала координат

$$J_x = \int\limits_L y^2 f(x,y)ds,\quad J_y = \int\limits_L x^2 f(x,y)ds,\quad J_0 = \int\limits_L (x^2+y^2) f(x,y)ds.$$

Аналогичные формулы имеют место для случая пространственной кривой.

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода (по длине дуги)

1) Если кривая L задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a; b]$, то

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{[x_t'(t)]^2 + [y_t'(t)]^2 + [z_t'(t)]^2}\,dt \tag{4}$$

2) Если кривая L плоская и $y = y(x)$, $\alpha \le x \le \beta$, то

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_\alpha^\beta f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1+[y_x'(x)]^2}\,dx \tag{5}$$

3) Если кривая L задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi\big)\sqrt{\rho(\varphi)^2 + [\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi \tag{6}$$

Вычисление криволинейного интеграла, как мы видим, сводится к вычислению определенного интеграла.

<u>*Пример*</u> *1*. Вычислить $I = \int\limits_L (x+y+z)ds$, если L: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ при $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

<u>*Решение.*</u> Используем формулу (4):

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t + t)\sqrt{[-\sin t]^2 + [\cos t]^2 + [1]^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t + t)dt = \sqrt{2}(2 + \frac{\pi^2}{8}).$$

<u>*Пример*</u> *2*. Вычислить $I = \int\limits_L x^2 ds$, если L: $y = \ln x$ при $1 \le x \le 2$.

Решение. Используем формулу (5):

$$I=\int_1^2 x^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2)=\frac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right).$$

Пример 3. Найти длину дуги кривой *L: x = cos t , y = sin t,* при $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Решение. $$l=\int_L ds=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(\cos t')^2+(\sin t')^2}\,dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin t^2+\cos t^2}\,dt=$$

$$\int_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}$$

Криволинейный интеграл 2-го рода (по координатам)

Пусть L – ориентированная кусочно-гладкая кривая с начальной точкой A и конечной точкой B. На кривой L задана вектор-функция $\vec{a}(M)=P(M)\vec{i}+Q(M)\vec{j}+R(M)\vec{k}=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$.

Разобьем кривую L на части точками $A_k,\ 1\le k\le n$, $A=A_0,A_1,\dots,A_n=B$. Координаты точки A_k обозначим через (x_k,y_k,z_k). Положим

$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k,\Delta y_k=y_{k+1}-y_k,\Delta z_k=z_{k+1}-z_k$$

В каждой части A_{k-1},A_k разбиения кривой L выберем произвольную точку M_k. Составим интегральную сумму

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}[P(M_i)\Delta x_i+Q(M_i)\Delta y_i+R(M_i)\Delta z_i]$$

Отметим, что $\Delta x_k,\Delta y_k,\Delta z_k$ - проекции дуги A_{k-1},A_k соответственно на оси *Ox, Oy, Oz*. Пусть Δl - длина наибольшей из дуг A_{k-1},A_k.

Определение. Если при $\Delta l\to 0$ существует конечный предел интегральных сумм σ, не зависящий ни от способа разбиения кривой L, ни от выбора точек M_k на дугах A_{k-1},A_k, то этот предел называется *криволинейным интегралом 2-го рода* от вектор-функции $\vec{a}(M)$ по кривой L и обозначается

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Таким образом, по определению

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} [P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i].$$

<u>*Теорема существования*</u>. Пусть *L* ориентированная кусочно-гладкая кривая, функции *P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)* определены и непрерывны на *L*. Тогда существует криволинейный интеграл 2-го рода (по координатам) $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$.

<u>*Замечание*</u>. В случае плоской кривой *L* криволинейный интеграл 2-го рода (по координатам) имеет вид

$$\int_L Pdx + Qdy.$$

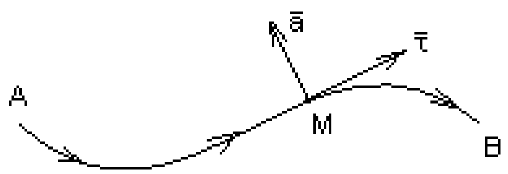
Обозначим через

$$\vec{r}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

радиус-вектор точки $M(x,y,z)$. Тогда $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$. Используя скалярное произведение, приходим к более краткой записи криволинейного интеграла 2-го рода

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (\bar{a}, d\bar{r}).$$

Пусть $\bar{\tau}(M)$ - единичный касательный вектор к линии *L* в точке *M*, направленный в соответствии с ориентацией *L*.



Будем считать, что ориентированная кривая L задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(l)$, где параметр l - длина кривой, отсчитываемая от начальной точки *A*. Тогда

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \vec{\tau}\ ,\ d\vec{r} = \vec{\tau} \cdot dl\,,$$

где $\vec{\tau} = \vec{\tau}(l)$ единичный вектор касательной в точке $M = M(l)$.

Теорема (*связь с криволинейным интегралом 1-го рода*).

$$\int\limits_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \int\limits_L (\bar{a}, \bar{\tau}) ds\,,$$

где интеграл справа – криволинейный интеграл по длине дуги *L* от скалярного произведения $(\bar{a}, \bar{\tau})$.

Свойства аддитивности и линейности, приведенные выше для криволинейного интеграла 1-го рода, справедливы и для криволинейного интеграла 2-го рода. При изменении ориентации кривой знак криволинейного интеграла по координатам меняется на противоположный

$$\int\limits_{AB} (\bar{a}, d\vec{r}) = -\int\limits_{BA} (\bar{a}, d\vec{r}) ds\,.$$

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода (по координатам)

1) Пусть кривая *L* задана параметрическим уравнением $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\bar{k}\,,\quad a \le t \le b\,.$

Тогда

$$\int\limits_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \int\limits_a^b \left(Px'_t + Qy'_t + Rz'_t\right) dt \qquad (7)$$

где $P = P(x(t), y(t), z(t))$, аналогично определены *Q* и *R*.

2) Если кривая *L* плоская и $y = y(x)$, $\alpha \le x \le \beta$, то

$$\int\limits_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \int\limits_\alpha^\beta \left(P(x,y) + Q(x,y)y'(x))dx\right) \qquad (8)$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода от функции $\bar{a} = z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k}$ вдоль кривой *L*: $\bar{r}(t) = t\bar{i} + t^2\,\bar{j} + t^3\bar{k},\ 0 \le t \le 1$.

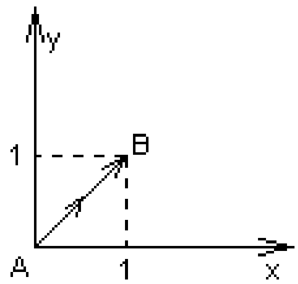
Решение. По формуле (7)

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_0^1 \left(t^3 \cdot 1 + t \cdot 2t + t^2 \cdot 3t^2\right) dt = \frac{91}{60}\,.$$

<u>Пример</u>. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_{AB} x^2dx + xydy$ вдоль отрезка *AB*, где *A(0,0), B(1, 1)*.

<u>Решение</u>.

Уравнение прямой *AB: x = y*



По формуле (8) $\int\limits_{AB} x^2dx + xydy = \int\limits_0^1 \left(x^2 + x^2\right)dx = \left(\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$.

Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом 2-го рода по границе L некоторой плоской области D с двойным интегралом по этой области.

<u>Теорема</u>. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области D, ограниченной кусочно-гладким контуром L, то имеет место равенство

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (9)$$

Символ $\oint\limits_L$ обозначает интегрирование по замкнутому контуру L - границе области D. Ориентация на L выбирается таким образом, что при интегрировании по L область D остается слева (положительная ориентация). При этом граница области D может состоять, вообще говоря, из нескольких замкнутых кривых (в этом случае область называется многосвязной).

Поверхностные интегралы

Пусть задана вектор – функция двух аргументов *u* и *v*, изменяющихся в некоторой области *D(u, v):*

$$\bar{r}(u,v) = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\bar{k} \ . \qquad (10)$$

При этом будем предполагать, что при разных значениях аргумента $(u,v) \neq (u_1,v_1)$ значения вектор-функции также различны: $\vec{r}(u,v) \neq \vec{r}(u_1,v_1)$.

Вектор $\bar{r}(u,v)$ откладывается из точки *0* (начало декартовой системы координат), т.е. он является радиус – вектором точки *M(u, v)*. Геометрическое место всех точек *M(u, v)* образует некоторую *поверхность* σ в пространстве (рис. 3).

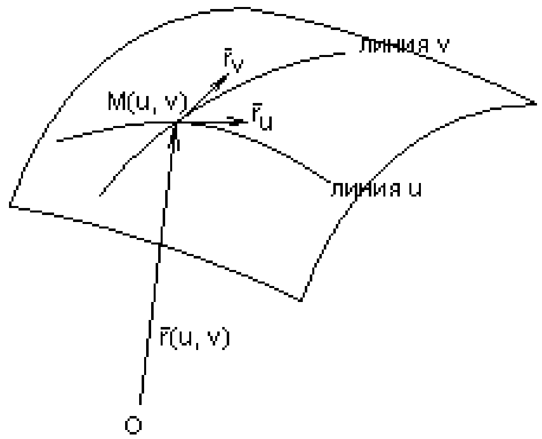


Рисунок 3

При фиксированом v рассмотрим линию, заданную уравнением $u \to \bar{r}(u,v)$ (линия u на рисунке). Через $\bar{r}_u$ обозначим касательный вектор к линии *u* в точке *M(u, v)*. Аналогично

$\bar{r}_v$ - вектор, направленный по касательной к линии *v* в точке *M(u, v)*.

Теорема. Касательные в точке *M* ко всевозможным линиям, проведенным через эту точку на поверхности σ, располагаются в одной плоскости.

Такая плоскость называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке *M*. Она определяется векторами $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$.

Определение 1. Прямая, проведенная через точку *M* перпендикулярно касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности в точке *M* (рис. 4). Вектор на этой прямой будем называть вектором нормали.

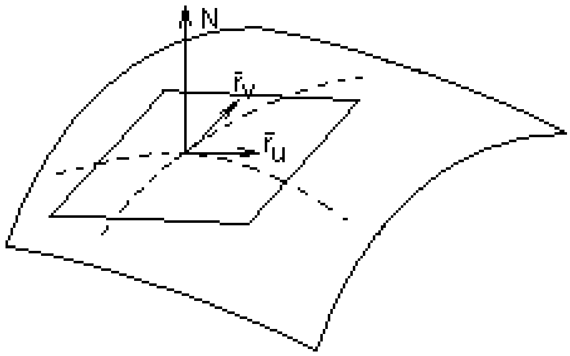


Рисунок 4

Вектор нормали N можно вычислить как векторное произведение $N = \pm[\bar{r}_u, \bar{r}_v]$ касательных векторов $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$.

Определение 2. Поверхность σ называется *гладкой*, если в каждой её точке существует касательная плоскость, непрерывно меняющаяся вдоль поверхности (т.е. при изменении точки M).

Отметим, что это равносильно тому, что функция $\bar{r}(u, v)$ дифференцируема и имеет непрерывные частные производные.

Если поверхность σ задана уравнением $z = f(x, y)$ (точка (x, y) принадлежат области D), то она будет гладкой тогда и только тогда, когда функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в области D.

Определение 3. Поверхность σ называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа гладких частей, примыкающих друг к друг по кусочно-гладким или просто гладким линиям.

Гладкими поверхностями являются, например, плоскость, сфера, эллипсоид, кусочно-гладкими – куб, конус.

Определение 4. Поверхность σ называется *двусторонней*, если какова бы ни была её точка M и каков бы ни был на ней замкнутый контур C, проходящий через точку M и не пересекающий границы σ, после его обхода мы возвращаемся в точку M с исходным направлением нормали.

Определение 5. Поверхность σ называется *односторонней*, если на ней существует хотя бы один замкнутый контур, обходя который, мы придем в начальную точку с противоположным направлением нормали.

Примерами двусторонних поверхностей являются плоскость, сфера, эллипсоид, односторонней поверхности – лист Мебиуса.

Фиксировать определенную сторону гладкой двусторонней поверхности – это значит из двух возможных векторов нормали N в каждой точке M выбрать такой, чтобы любые два выбранных вектора можно было бы перевести друг в друга непрерывным образом. Тем самым, выбор направления нормали в одной точке однозначно определяет выбор направления нормали во всех точках. Стороной поверхности будем называть совокупность точек поверхности с нормалями.

В случае незамкнутой двусторонней поверхности мы не будем как-либо заранее предопределять выбор той или другой стороны. Всякая замкнутая поверхность, является, очевидно, двусторонней и мы будем всюду выбирать на ней внешнюю сторону, т.е. в каждой её точке будем указывать внешнюю нормаль.

Поверхностные интегралы 1-го типа (по площади поверхности)

Пусть задана некоторая гладкая двусторонняя поверхность σ и на ней функция *f(M)*. Разобьем поверхность сеткой линий на *n* ячеек σ_k, $1 \le k \le n$, с площадями $\Delta\sigma_k$. В каждой ячейке выберем точку M_k и составим *интегральную сумму*:

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k. \qquad (11)$$

<u>*Определение*</u>. *Поверхностным интегралом 1-го типа от функции f(M) по поверхности* σ называется предел интегральных сумм (11) при стремлении к нулю наибольшего диаметра ячеек δ = $\max\limits_k\left(diam\Delta\delta_k\right) \to 0$, если предел существует и не зависит от способа разбиения и выбора точек M_k. Он обозначается $\iint\limits_{\sigma} f(M)d\sigma$. Таким образом, получаем

$$\lim_{\max\limits_k\left(diam\Delta\delta_k\right)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\delta_k = \iint\limits_{\sigma} f(M)d\sigma. \qquad (12)$$

Свойства аддитивности и линейности, приведенные выше для криволинейных интегралов, справедливы и для поверхностного интеграла 1-го типа. Свойство аддитивности формулируется в данном случае следующим образом. Для кусочно-гладкой поверхности σ, состоящей из частей $\delta_1 \ldots \delta_q$, имеем

$$\iint\limits_{\sigma} f(M)d\sigma = \iint\limits_{\delta_1} f(M)d\sigma + \ldots + \iint\limits_{\delta_q} f(M)d\sigma \qquad (13)$$

При изменении ориентации поверхности знак поверхностного интеграла 1-го типа не меняется.

Для поверхностного интеграла 1-го типа также выполнены теоремы об оценке и о среднем.

<u>*Теорема существования*</u>. Если функция *f(M)* непрерывна на поверхности σ, то поверхностный интеграл 1-го типа существует.

Замечание. Если функция *f(M)=1,* то получаем формулу для вычисления площади поверхности

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma \ .$$

Вычисление поверхностного интеграла 1-го типа

Вычисление методом проектирования на координатные плоскости

Пусть гладкая поверхность σ взаимно однозначно проектируется на область *D* плоскости *XOY*. В этом случае справедлива формула

$$\iint_{\sigma} f(M)d\sigma = \iint_{D_{xy}} f\left(x, y, z(x, y)\right)\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}, \qquad (14)$$

где $z = z(x, y)$ – уравнение поверхности σ ($z(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция),

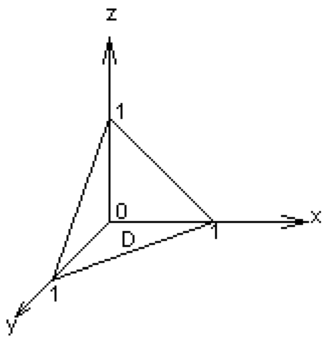
$\cos\gamma$ - направляющий косинус единичного вектора нормали к поверхности в точке $\left(x, y, z(x, y)\right)$),

$$\overline{n} = \cos\alpha \cdot \overline{i} + \cos\beta \cdot \overline{j} + \cos\gamma \cdot \overline{k} \ .$$

Формула (14) может быть записана в виде:

$$\iint_{\sigma} f(M)d\sigma = \iint_{D_{xy}} f\left(x, y, z(x, y)\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy \qquad (15)$$

Пример. Вычислить $\iint_{\sigma}(1+x+z)d\sigma$, если σ - плоскость треугольника $x + y + z = 1$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.



Решение. Выразим z из уравнения плоскости : $z = 1 – x – y$. Вычислим частные производные и значение выражения

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}$$

По формуле (15) имеем:

$$\iint_{\sigma}(1+x+z)d\sigma = \iint_{D_{xy}}(1+x+1-x-y)\sqrt{3}dxdy =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 (2-y)dy \int_0^{1-y} dx = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

Вычисление поверхностного интеграла с помощью координат на поверхности

Иногда вычисляют поверхностный интеграл путем введения координат на самой поверхности. Рассмотрим данный метод на примере цилиндрической и сферической поверхностей.

На цилиндре $x^2 + y^2 = R^2$ введем в качестве координат точек цилиндра координаты $(\varphi,\ z)$, где $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. Тогда

$$x = R \cdot \cos\varphi$$
$$y = R \cdot \sin\varphi$$
$$z = z$$
$$d\sigma = R \cdot d\varphi \cdot dz$$

На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ введем в качестве координат ее точек углы $(\varphi,\ \theta)$, где $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-0 \le \theta \le \pi$. Тогда

$$x = R \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$$
$$y = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$
$$z = R\cos\theta$$
$$d\sigma = R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

<u>Пример</u>. Найти площадь цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = x$.

<u>Решение.</u>

$$S=\iint\limits_{\sigma} d\sigma = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{R\cos\varphi} R dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos\varphi d\varphi = 2R^2 .$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma$,

где поверхность σ - это полусфера радиуса R при $z \geq 0$.

Решение. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin^2\theta d\theta = \dfrac{\pi^2 R^3}{2}$.

Поверхностный интеграл 2-го типа (по координатам)

Пусть задана гладкая двусторонняя поверхность σ и задана её *ориентация*, т.е. указано направление нормали (фиксирована какая-либо из двух сторон поверхности).

Предположим, что поверхность σ взаимно однозначно проектируется на область *D* плоскости *XOY*. Пусть σ задана функцией $z = z(x, y)$, где $z(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть в точках поверхности σ задана некоторая функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность сеткой линий на *n* ячеек σ_k , $1 \leq k \leq n$, и спроектируем их на координатную плоскость *XOY*. Площадь проекции Δs_k берется со знаком «плюс», если выбрана верхняя сторона поверхности. В этом случае нормаль $\bar{n} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \bar{k}$ к выбранной стороне поверхности составляет с осью Oz острый угол γ , т.е. $\cos\gamma > 0$. Соответственно площадь проекции Δs_k берется со знаком «минус», если выбрана нижняя сторона поверхности. В каждой ячейке σ_k , $1 \leq k \leq n$, выберем точку M_k , $M_k = (x_k, y_k, z(x_k, y_k))$, и составим *интегральную сумму*:

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z(x_k, y_k))\Delta s_k . \quad (16)$$

Определение. Поверхностным интегралом 2-го типа от функции f(M) (*по координатам* (x, y)) называется предел интегральных сумм (16) при стремлении к нулю наибольшего диаметра ячеек $\delta = \max\limits_{k}\left(diam \Delta\sigma_k\right) \to 0$, если предел существует и не зависит от способа разбиения и выбора точек M_k. Он обозначается $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)dxdy$.

Таким образом, получаем

$$\lim_{\max\limits_k (diam\Delta\sigma_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k = \iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)dxdy.$$

Аналогичным образом, если вместо плоскости Oxy проектировать элементы σ_k, $1\le k\le n$, поверхности σ на плоскости Ozy и Oxz, определяются поверхностные интегралы 2-го типа по координатам (z,y) и (x,z), которые обозначаются соответственно

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)dzdy \quad \text{и} \quad \iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)dxdz.$$

Объединяя эти три интеграла, придем к виду, который наиболее часто используется на практике

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy, \qquad (17)$$

где (P,Q,R) есть функции (x,y,z), определенные в точках поверхности σ. Интеграл (17) можно записать более коротко. Введем вектор-функцию

$$\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}.$$

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\sigma} \left(\bar{a}(M), d\sigma\right).$$

<u>*Замечание*</u>. Знак поверхностного интеграла 2-го типа зависит от выбора ориентации поверхности.

Как и в случае криволинейных интегралов, для поверхностных интегралов 1-го и 2-го типа имеется связь, которая задается следующей формулой

$$\iint\limits_{\sigma} \left(\bar{a}(M), d\sigma\right) = \iint\limits_{\sigma} \left(\bar{a}(M), \bar{n}(M)\right) d\sigma. \qquad (18)$$

Здесь
$\bar{n} = \cos\alpha\cdot\bar{i} + \cos\beta\cdot\bar{j} + \cos\gamma\cdot\bar{k}$ - вектор выбранной нормали.

5. Элементы теории поля

Понятие поля. Скалярное и векторное поля

В физических задачах часто встречаются два типа величин: скаляры и векторы. Например, если каждой точке данной области пространства поставить в соответствие некоторое число (значение физической величины, скажем, температуры), то говорят, что задано *скалярное поле* (поле температур). Если же каждой точке данной области пространства поставить в соответствие вектор (например, при движении жидкости или газа каждой точке сопоставлен вектор скорости), то говорят, что задано *векторное поле*

Определение 1. *Скалярным полем* $u(M)$ называется числовая функция, заданная в точках пространственной области V.

Определение 2. *Векторным полем* называется векторная функция $\bar{a}(M)$, заданная в области V.

В декартовой системе координат скалярное поле $u(M)$ задается некоторой функцией трех переменных x, y, z, которая обычно обозначается той же самой буквой u, что и сама физическая величина:

$$u(M) = u(x, y, z).$$

Аналогично скалярному полю, векторное поле в декартовой системе координат задается вектором

$$\bar{a}(M) = P(x,y,z)\cdot\bar{i} + Q(x,y,z)\cdot\bar{j} + R(x,y,z)\cdot\bar{k},$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орты декартовой системы координат,

$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ - координаты вектора $\bar{a}(M)$.

Примерами скалярных полей служат поле плотности массы тела, поле распределения температур тела, поле плотности электрического заряда тела. К векторным полям относятся поле сил тяготения, поле магнитной напряженности, поле скоростей частиц движения жидкости или газа.

Поля подразделяются на стационарные и нестационарные. Мы будем изучать только стационарные поля, то есть такие, которые не меняются с течением времени.

Перейдем к рассмотрению основных характеристик скалярных и векторных полей.

Скалярное поле. Производная поля по направлению. Градиент

Геометрическую характеристику поведения скалярного поля в области V чаще всего вводят при помощи поверхности уровня.

Определение 3. *Поверхностью уровня* скалярного поля $u(M)$ называется геометрическое место точек M области V пространства, в которых значение поля равно одной и той же постоянной c, т.е. $u(M) = c$. Различным значениям постоянной c соответствуют различные поверхности уровня скалярного поля величины u. В декартовой системе координат всевозможные поверхности уровня скалярного поля величины *u* определяются уравнениями вида:

$$u(x, y, z) = c \qquad (1)$$

<u>Пример.</u> Найти поверхности уровня скалярного поля $u(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, заданного в декартовой системе координат в области V, совпадающей со всем пространством.

<u>Решение.</u> Для нахождения поверхностей уровня, отвечающих значению величины поля *c*, положим

$$u(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c$$

Тогда $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, то есть поверхностями уровня в рассматриваемом случае являются всевозможные сферы радиуса *c*.

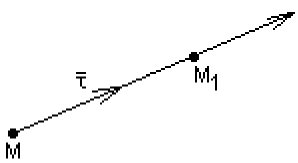
Для плоского скалярного поля (соответствующего $z = 0$) уравнение (1) приобретает вид $u(x, y) = c$ и определяет совокупность *линий уровня*.

Поверхности уровня позволяют судить о скорости изменения скалярного поля *u(M)* по тому или иному направлению качественно. Для количественной характеристики скорости изменения поля введем понятие производной по направлению *l*.

Пусть *u(M)* – скалярное поле в некоторой пространственной области *V*, задаваемое в декартовой системе координат функцией *u(x, y, z)* трех переменных, которую будем предполагать дифференцируемой, $\bar{l}$ - некоторое фиксированное направление, задаваемое единичным вектором

$$\bar{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

а α, β, γ - углы, образуемые направлением *l* с осями координат. Зафиксируем точку *M(x, y, z)*, а точку $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ будем выбирать на луче, выходящем из точки *M* в направлении вектора $\bar{\tau}$.



<u>*Определение*</u> *4. Производной скалярного поля u(M) по направлению l* называется предел:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{|M'M| \to 0} \frac{\Delta u}{|M'M|} = \lim_{|M'M| \to 0} \frac{u(M') - u(M)}{|M'M|}$$

Заметим, что отношение $\dfrac{u(M') - u(M)}{|M'M|}$ - есть средняя скорость изменения поля *u(M)* при переходе от точки *M* к точке *M’* вдоль направления *l*. Предел этого отношения при $|M'M| \to 0$ дает мгновенную скорость изменения скалярного поля в точке *M* по направлению *l*. Отсюда, в частности, следует, что при $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$ поле *u(M)* возрастает вдоль *l* в точке *M*, а при $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$ - убывает. Укажем формулу для вычисления производной скалярного поля по направлению *l* в декартовой системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos\gamma \quad . \qquad (2)$$

<u>*Определение*</u> 5. *Градиентом* скалярного поля *u(M)* называется вектор

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \bar{k}\ .$$

Формула (2) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\bar{\tau}, grad\ u\right) \qquad (3)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\bar{\tau}| \cdot |grad\ u| \cdot \cos\varphi \quad = |grad\ u| \cdot \cos\varphi\ . \qquad (4)$$

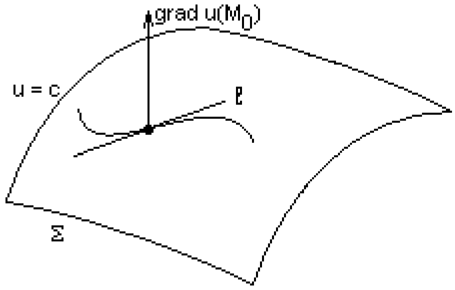
Здесь φ - угол между *grad u* и направляющим вектором $\bar{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ прямой *l*. Из последней формулы видно, что максимум $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точке *M* по всем возможным направлениям *l* достигается при условии совпадения направления *l* с направлением градиента ($\varphi = 0$). Таким образом,

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |grad\ u|. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что градиент направлен в сторону наибыстрейшего возрастания функции *u* , а его длина равна скорости возрастания (таким образом, градиент определяется самим полем , а не выбором системы координат). Сформулированное утверждение можно рассматривать, как инвариантное (т.е. не зависящее от выбора системы координат) определение градиента.

<u>Пример</u>. Установить характер роста скалярного поля *u = xyz* по направлению вектора $\bar{l} = \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$ в точке *M(1, 1, 1)* и найти величину скорости изменения данного поля в указанном направлении.

<u>Решение</u>. Вычислим частные производные:



$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot z,\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot z,\ \ \frac{\partial u}{\partial z} = x \cdot y \quad .$$

Их значения в точке *M(1, 1, 1)*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M(1,1,1)} = 1,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M(1,1,1)} = 1,\ \ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M(1,1,1)} = 1.$$

Найдем единичный вектор направления *l*:

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \frac{\bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}}{\sqrt{1 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}\left(\bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}\right),$$

т.е. $\cos\alpha = \frac{1}{3},\ \ \cos\beta = -\frac{2}{3},\ \ \cos\gamma = \frac{2}{3}$.

Используя формулу (2) имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M(1,1,1)} = 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Поскольку $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{3} > 0$, то скалярное поле *u(M)* в направлении *l* возрастает.

Наибольшая скорость изменения поля определяется по формуле (5)

$$grad\ \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M(1,1,1)} = |grad\ u|\Big|_{M(1,1,1)} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

<u>*Теорема*</u> *1*. Градиент скалярного поля *u(M)* в точке *M* направлен по нормали к поверхности уровня скалярного поля *u(M)*, проходящей через точку *M*.

<u>Доказательство</u>. По определению вектор перпендикулярен поверхности в данной точке, если он перпендикулярен касательной плоскости к поверхности в этой точке. Возьмем касательную *l* в точке M_0 и проведем в поверхности σ кривую *L*, касающуюся в точке M_0 прямой *l*. Кривая *L* может быть задана вектор – функцией $\bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k}$.

Поскольку *L* лежит на поверхности σ , то

$$u\big(x(t), y(t), z(t)\big) \equiv u\big(x_0, y_0, z_0\big) = c \qquad (6)$$

Продифференцируем обе части (6) по *t*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=0,$$

или, записывая по другому: $\left(grad\, u,\ \frac{d\bar{r}}{dt}\right)=0$,

так как вектор $\frac{d\bar{r}}{dt}$ параллелен *l*, то *grad u* перпендикулярен *l* и, следовательно, он ортогонален σ. Теорема доказана.

Покажем, как с помощью градиента можно найти единичный вектор $\bar{n}$ нормали к поверхности, заданной уравнением

$$F(x, y, z) = c. \qquad (7)$$

Так как формула (7) определяет одну из поверхностей уровня скалярного поля $u = F(x, y, z)$, то из теоремы 1 следует, что *grad u* ортогонален к поверхности (7). Поэтому, чтобы найти единичный вектор нормали, нужно *grad u* разделить на его длину:

$$\bar{n}=\pm\frac{grad\ u}{|grad\ u|}=\pm\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\bar{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\bar{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\bar{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \qquad (8)$$

Сопоставляя формулу (8) с другим выражением единичного вектора нормали

$$\bar{n}=\cos\alpha\cdot\bar{i}+\cos\beta\cdot\bar{j}+\cos\gamma\cdot\bar{k},$$

имеем формулы для нахождения направляющих косинусов нормали к поверхности (7):

$$\cos\alpha=\pm\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta=\pm\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}, \qquad (9)$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Пример. Найти единичный вектор нормали к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в произвольной её точке.

Решение. Сфера является одной из поверхностей уровня поля $u = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$.

Тогда, используя (8), имеем:

$$\bar{n} = \pm \frac{2x \cdot \bar{i} + 2y \cdot \bar{j} + 2z \cdot \bar{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \pm \frac{x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}}{R}.$$

Направляющие косинусы нормали (знак «плюс» соответствует внешней нормали)

$$\cos\alpha = \pm \frac{x}{R}, \quad \cos\beta = \pm \frac{y}{R}, \quad \cos\gamma = \pm \frac{z}{R}.$$

Основными свойствами градиента являются:

1. Линейность
$$grad(c_1 u_1 \pm c_2 u_2) = c_1 grad\, u_1 \pm c_2 grad\, u_2,$$
c_1, c_2 - постоянные, $u_1(M), u_2(M)$ - скалярные поля.
2. Градиент произведения
$$grad(uv) = v grad\, u + u grad\, v$$
3. Градиент частного
$$grad\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v grad\, u - u grad\, v}{v^2}$$
4. Градиент сложной функции
$grad\, F(u) = F'(u) \cdot grad\, u$, где *F(u)* – сложная функция.

Векторное поле. Дивергенция. Ротор

Так как всякий вектор определяется длиной и направлением в пространстве, то векторное поле представляет собой «одновременно» поле длин и поле направлений. Для поля направлений геометрической характеристикой может служить совокупность векторных линий.

Определение 6. *Векторной линией* данного векторного поля $\bar{a}(M)$ называется всякая линия в области *V* пространства, которая в каждой своей точке касается вектора поля $\bar{a}(M) = \big(P(M), Q(M), R(M)\big)$, заданного в этой точке.

Вывод и решение дифференциальных уравнений, которые определяют векторную линию, рассматриваются в третьем семестре в курсе «Дифференциальные уравнения».

Важными характеристиками векторного поля являются дивергенция и ротор.

Определение 7. *Дивергенцией* векторного поля

$$\bar{a}(M) = P(x,y,z)\cdot\bar{i} + Q(x,y,z)\cdot\bar{j} + R(x,y,z)\cdot\bar{k},$$

где P, Q, R – непрерывно - дифференцируемые функции, называется скалярная величина

$$div\,\bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (10)$$

Свойства дивергенции

1) $div\left(c_1\cdot\bar{a}_1 + c_2\cdot\bar{a}_2\right) = c_1\cdot div\,\bar{a}_1 + c_2\cdot div\,\bar{a}_2$.
2) $div\,\bar{a} = 0$, если $\bar{a}$ - постоянное векторное поле.
3) $div\left(\mathrm{u}\cdot\bar{a}\right) = (\bar{a}, grad\,\mathrm{u}) + \mathrm{u}\cdot div\,\bar{a}$, где u - скалярное поле

В частности, если $\bar{a}$ - постоянное векторное поле, то

$$div\left(\mathrm{u}\cdot\bar{a}\right) = (\bar{a}, grad\,\mathrm{u}).$$

Определение 8. *Ротором* векторного поля $\bar{a}$ называется вектор:

$$rot\,\bar{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\bar{k}$$

или в форме, удобной для запоминания

$$rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Свойства ротора

1) $rot\left(c_1\cdot\bar{a}_1 + c_2\cdot\bar{a}_2\right) = c_1\cdot rot\,\bar{a}_1 + c_2\cdot rot\,\bar{a}_2$.
2) $rot\,\bar{a} = 0$, если $\bar{a}$ - постоянное векторное поле.
3) $rot\left(\mathrm{u}\cdot\bar{a}\right) = \left[grad\,\mathrm{u}, \bar{a}\right] + u\cdot rot\,a$, если u - скалярное поле.

Пример. Найти дивергенцию и ротор поля $\bar{a} = 2y\cdot\bar{i} + x\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k}$.

Решение.

$$div\,\bar{a} = \frac{\partial(2y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1,$$

$$rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & x & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) \cdot \bar{i} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial (2y)}{\partial z} \right) \cdot \bar{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (2y)}{\partial y} \right) \cdot \bar{k} =$$

$$= 0 - 0 + (1-2) \cdot \bar{k} = -\bar{k}$$

Введем полезное понятие.

<u>Определение</u> 9. *Оператором* ∇ *(«набла»)* или *символическим вектором Гамильтона*, называется выражение

$$\nabla = \bar{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z},$$

правила обращения с которым следующие.

1) Если u – скалярное поле, то

$$\nabla u = \left(\bar{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \bar{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{j} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \bar{k} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = grad\ u$$

.

2) Если $\bar{a} = P \cdot \bar{i} + Q \cdot \bar{j} + R \cdot \bar{k}$ - векторное поле, то

$$(\nabla; \bar{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = div\,\bar{a}\ ;$$

$$[\nabla; \bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = rot\,\bar{a}\ .$$

Пользуясь оператором ∇, легко доказать, например, первое свойство ротора:

$$rot\left(c_1\cdot\bar{a}_1+c_2\cdot\bar{a}_2\right)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ c_1\cdot P_1+c_2\cdot P_2 & c_1\cdot Q_1+c_2\cdot Q_2 & c_1\cdot R_1+c_2\cdot R_2\end{vmatrix}=$$

$$=(\text{по свойству определителей})=$$

$$=c_1\cdot\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P_1 & Q_1 & R_1\end{vmatrix}+c_2\cdot\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P_2 & Q_2 & R_2\end{vmatrix}=$$

$$=c_1\cdot rot\,\bar{a}_1+c_2\cdot rot\,\bar{a}_2$$

Пользуясь известной формулой из механики для поля скоростей $\overline{V}(M)$ движущегося твердого тела в каждый фиксированный момент времени *t,* можно установить физический смысл ротора. Имеем:

$$\overline{V}(M)=\overline{V_0}+\left[\overline{\omega},\bar{r}\right],$$

где $\overline{V_0}=a\cdot\bar{i}+b\cdot\bar{j}+c\cdot\bar{k}$ - мгновенная скорость какой-либо точки тела (например, центра тяжести), $\overline{\omega}$ - мгновенная угловая скорость движения тела, $\bar{r}=x\cdot\bar{i}+y\cdot\bar{j}+z\cdot\bar{k}$. Для нахождения ротора векторного поля $\overline{V}(M)$ выберем систему координат, связанную с телом, так, чтобы ось *OZ* была направлена по вектору $\overline{\omega}$. Тогда $\overline{\omega}=\omega\cdot\bar{k}$,

$$\overline{V}(M)=a\cdot\bar{i}+b\cdot\bar{j}+c\cdot\bar{k}+\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=(a+\omega y)\cdot\bar{i}+(b-\omega x)\cdot\bar{j}+c\cdot\bar{k}$$

и, следовательно,

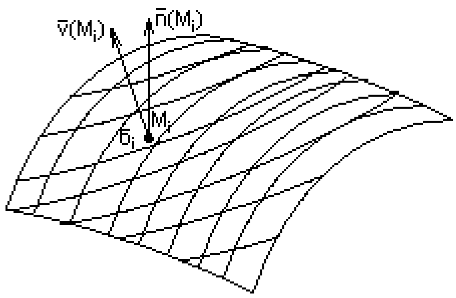
$$rot\,\overline{V}(M)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a+\omega y & b-\omega x & c\end{vmatrix}=2\omega\cdot\bar{k}=2\overline{\omega}\,.$$

Таким образом, ротор поля скоростей точек движущегося твердого тела равен удвоенной угловой скорости вращения тела.

Поток векторного поля и его вычисление

Рассмотрим гидродинамическую задачу о потоке жидкости через поверхность. Пусть объем *V* пронизывается стационарным потоком жидкости с полем скоростей *v(M)* и внутрь этого потока поставлена некоторая проницаемая гладкая, двусторонняя поверхность σ. Требуется определить количество жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени.

Зафиксируем одну из сторон поверхности σ, задав направление нормали $\overline{n}(M)$. Разобьем σ сеткой линий (см. рисунок) на ячейки площади $\Delta\sigma_i$, $1 \le i \le k$, выберем в каждой ячейке точку M_i и проведем вектор нормали $\overline{n}(M_i)$.



Если ячейки достаточно мелкие, то можно считать, что σ_i - плоская поверхность, и вектор скорости протекания жидкости v_i постоянен в пределах σ_i. Тогда за единицу времени *t* через ячейку σ_i пройдет количество жидкости, равное объему наклонного параллелепипеда

$$\Delta\Pi_i \approx \left(\overline{v}(M_i), \overline{n}(M_i)\right) \cdot \Delta\sigma_i \,.$$

Весь поток жидкости через поверхность σ будет приближенно равен

$$\Pi_i \approx \sum_{i=1}^{k} \left(\overline{v}(M_i), \overline{n}(M_i)\right) \cdot \Delta\sigma_i$$

Переходя к пределу, когда наибольший диаметр ячейки разбиения $\max\limits_i d(\sigma_i)$ стремится к нулю, имеем

$$\Pi = \lim_{\max\limits_i d(\sigma_i) \to 0} \sum_{i=1}^{k} \left(\overline{v}(M_i), \overline{n}(M_i)\right) \cdot \Delta\sigma_i = \iint\limits_{\sigma} \left(\overline{v}(M), \overline{n}(M)\right) d\sigma \,.$$

Таким образом, величина Π представляет собой поверхностный интеграл по поверхности σ от функции $F(M) = \left(\overline{v}(M), \overline{n}(M)\right)$.

По аналогии с этой задачей вводится определение потока произвольного векторного поля $\overline{a}(M)$ через поверхность σ. Пусть σ – двусторонняя гладкая поверхность. Фиксируем выбором нормали одну из двух её сторон. Напомним, что в случае замкнутой поверхности выбирается, как правило, внешняя нормаль.

<u>*Определение*</u> *10. Потоком векторного поля* $\overline{a}(M)$ *через поверхность* σ называется поверхностный интеграл от скалярного произведения векторов $\overline{a}(M)$ и $\overline{n}(M)$, где M – произвольная точка поверхности σ

$$\Pi = \iint_{\sigma} \left(\overline{a}(M), \overline{n}(M)\right) d\sigma .$$

Если поверхность σ кусочно-гладкая, то поток векторного поля $\overline{a}(M)$ определяется как сумма потоков через каждую её гладкую часть.

Понятие потока векторного поля $\overline{a}(M)$ применяется для решения различных задач физики, электротехники, гидродинамики, например, при вычислении количества жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени.

Свойства потока

1) Свойство линейности.

$$\iint_{\sigma} \left(c_1\overline{a}_1 + c_2\overline{a}_2, \overline{n}\right) d\sigma = c_1 \cdot \iint_{\sigma} \left(\overline{a}_1, \overline{n}\right) d\sigma + c_2 \cdot \iint_{\sigma} \left(\overline{a}_2, \overline{n}\right) d\sigma ,$$

если c_1, c_2 - постоянные.

2)Свойство аддитивности. Для кусочно-гладкой поверхности σ, состоящей из частей σ_1, σ_2, имеем

$$\iint_{\sigma} \left(\overline{a}, \overline{n}\right) d\sigma = \iint_{\sigma_1} \left(\overline{a}, \overline{n}\right) d\sigma + \iint_{\sigma_2} \left(\overline{a}, \overline{n}\right) d\sigma .$$

3)При изменении выбранной стороны поверхности поток Π меняет знак, так как переход от данной стороны поверхности к другой состоит в том, что в каждой точке M вектор $\overline{n}(M)$ заменяется на противоположный вектор $-\overline{n}(M)$.

Вычисление потока векторного поля $\overline{a}(M)$ через поверхность σ может быть осуществлено несколькими методами: проектированием на одну из координатных плоскостей, проектированием на три координатные плоскости и посредством введения специальной системы координат на поверхности σ. Рассмотрим более подробно метод проектирования на одну из координатных плоскостей, состоящий в следующем. Если σ – кусочно-гладкая поверхность, и она делится на части, взаимно однозначно проектирующиеся на какую-либо координатную плоскость, то подсчитываются потоки через каждую из частей поверхности и результаты суммируются.

Пусть поверхность σ задана уравнением *F(x, y, z) = 0*. Предположим, что поверхность σ взаимно однозначно проектируется на плоскость *XOY*, и выбрана сторона поверхности (т.е. определенное направление нормали). Тогда поток

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\bar{a}, \bar{n}) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{(\bar{a}, \bar{n})}{|\cos\gamma|} \right|_{z=z(x,y)} dxdy, \qquad (12)$$

где D_{xy} - проекция поверхности σ на плоскость *XOY*, γ-угол, составленный нормалью с осью *OZ*.

Таким образом, вычисление потока сводится к вычислений двойного интеграла по плоской области D_{xy}. Аналогично подсчитываются потоки через поверхности, взаимно однозначно проектирующиеся на другие координатные плоскости:

$$\Pi = \iint_{D_{yz}} \left. \frac{(\bar{a}, \bar{n})}{|\cos\alpha|} \right|_{x=x(y,z)} dydz;$$

$$\Pi = \iint_{D_{xz}} \left. \frac{(\bar{a}, \bar{n})}{|\cos\beta|} \right|_{y=y(x,z)} dxdz.$$

Здесь предполагается, что единичный вектор нормали имеет вид

$$\bar{n} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \bar{k}.$$

<u>Пример</u>. Найти поток векторного поля $\bar{a} = x^2 \cdot \bar{i} + x \cdot \bar{j} + xz \cdot \bar{k}$ через часть поверхности параболоида вращения $y = x^2 + z^2$, лежащую в первом октанте и ограниченную плоскостью $\boldsymbol{y = 1}$ *(0 ≤ y ≤ 1)*, по направлению внешней нормали.

<u>Решение</u>. Запишем уравнение поверхности в виде

F(x, y, z) = 0, т.е. $x^2 + z^2 - y = 0$.

Вектор единичной нормали к поверхности параболоида определяется с точностью до знака равенством

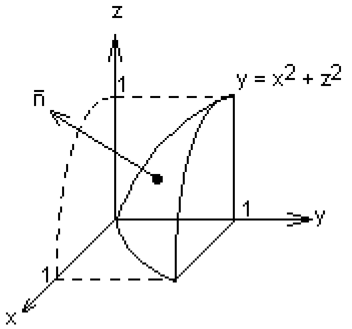
$$\bar{n} = \pm \frac{grad\ u}{|grad\ u|} = \pm \frac{2x \cdot \bar{i} - \bar{j} + 2z \cdot \bar{k}}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}}.$$

При этом вектору внешней нормали отвечает знак «плюс» и, следовательно,

$$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}} < 0.$$

В самом деле, из рисунка, приведенного ниже, видно, что внешняя нормаль образует острые углы с положительным направлением осей *OX* и *OY* и тупой угол с положительным направлением оси *OY* (угол β).

Поток в этом случае удобно считать, проектируя на плоскость *XOZ*, то



есть по формуле

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{(\bar{a},\bar{n})}{|\cos\beta|}\bigg|_{y=y(x,z)} dxdz\,.$$

Вычислим $\dfrac{(\bar{a},\bar{n})}{|\cos\beta|}\bigg|_{y=y(x,z)} = \dfrac{\dfrac{2x^3 - x + 2xz^2}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}}{\left|-\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}\right|} = x\cdot\left[2\left(x^2+z^2\right)-1\right]$

Таким образом

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xz}} x\cdot\left[2\left(x^2+z^2\right)-1\right]dxdz\,.$$

Переходя к полярным координатам на плоскости *XOZ:* $x = \rho\cdot\cos\varphi$, $z = \rho\cdot\sin\varphi$, получим

$$\Pi = \int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi \;\; d\varphi \;\; \int\limits_0^1\left(2\rho^4-\rho^2\right)d\rho = \frac{1}{15}\,.$$

Рассмотрим вычисление потока с *помощью введения координат на поверхности* (для цилиндрической или сферической поверхностей).

<u>*Пример*</u>. Найти поток векторного поля $\bar{a} = (x-y)\cdot\bar{i} + (x+y)\cdot\bar{j} + \bar{k}$ через часть цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, заключенную между плоскостями $z = 0$ и $z = x$.

<u>*Решение*</u>. Найдем внешнюю нормаль:

$$\bar{n} = \frac{grad\, u}{|grad\, u|} = \frac{x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}}{R}, \quad \text{где} \quad F = x^2 + y^2 - R^2.$$

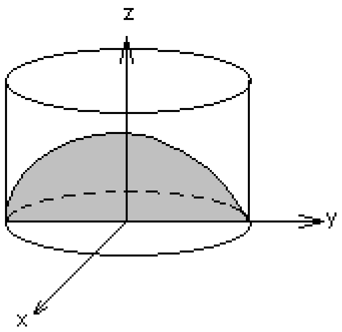
Вычислим

$$(\bar{a}, \bar{n}) = \frac{(x-y)\cdot x + (x+y)\cdot y}{R} = \frac{x^2 + y^2}{R} = \frac{R^2}{R} = R$$

Введем координаты на цилиндре

$$x = R \cdot \cos\varphi \ , \ y = R \cdot \sin\varphi \ , \ z = z, \ d\sigma = R \cdot d\varphi \ \cdot dz$$

Угол φ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а z - от *0* до $z = x$, или $z = R \cdot \cos\varphi$ (см. рисунок).



Таким образом,

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\bar{a}, \bar{n}) d\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{R\cos\varphi} R^2 dz = R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \ \ d\varphi \ = 2R^3$$

Ответ: $\Pi = 2R^3$

Пример. Найти поток векторного поля $\bar{a} = z \cdot \bar{i} + \bar{j} - x \cdot \bar{k}$ через часть сферической поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенную в первом октанте.

Решение. Запишем уравнение сферической поверхности в виде *F(x, y, z) = 0*: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Найдем внешнюю нормаль

$$\bar{n} = \frac{grad\,(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)}{|grad\,(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)|} = \frac{x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}}{R}.$$

Вычислим

$$(\bar{a}, \bar{n}) = \frac{x \cdot z + y - z \cdot x}{R} = \frac{y}{R}.$$

В координатах на сфере $(\bar{a},\bar{n}) = \sin\theta\cdot\sin\varphi$, где $0\le\theta\le{\pi}/{2}$, $0\le\varphi\le{\pi}/{2}$ (первый октант).

Тогда

$$\Pi = \iint_{\sigma}(\bar{a},\bar{n})d\sigma = \iint_{\sigma}\sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot R^2\cdot\sin\theta\cdot d\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^{\pi/2}R^2\sin^2\theta d\theta = R^2\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos\theta}{2}d\theta = \frac{\pi R^2}{4}$$

<u>Ответ</u>. $\Pi = \dfrac{\pi R^2}{4}$

Теорема Остроградского - Гаусса

<u>*Теорема Остроградского - Гаусса*</u>. Пусть σ - замкнутая кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая тело *V*. $\bar{n} = \cos\alpha\cdot\bar{i} + \cos\beta\cdot\bar{j} + \cos\gamma\cdot\bar{k}$ - единичный вектор внешней нормали в точках поверхности σ, тогда поток векторного поля $\bar{a}(M) = (P,Q,R)$ (*P, Q, R* имеют непрерывные частные производные) через поверхность σ равен интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью от дивергенции поля $\bar{a}(M)$

$$\oiint_{\sigma}(\bar{a},\bar{n})d\sigma = \iiint_V div\,\bar{a}dv.$$

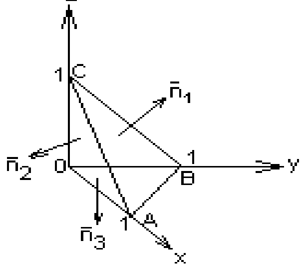
В координатной форме формула Остроградского - Гаусса имеет вид

$$\oiint_{\sigma}(P\cdot\cos\alpha + Q\cdot\cos\beta + R\cdot\cos\gamma)d\sigma = \iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

<u>*Пример*</u>. Вычислить поток векторного поля

$$\bar{a}(M) = (x-2z)\cdot\bar{i} + (3z-4x)\cdot\bar{j} + (5x+y)\cdot\bar{k}$$

через полную поверхность пирамиды с вершинами *A (1,0,0)*, *B(0,1, 0)*, *C(0, 0, 1)*, *O(0, 0, 0)* (через внешнюю сторону поверхности)



<u>Решение</u>. Поверхность σ состоит из четырех плоских треугольников *ABC, BOC, COA, AOB*.

Используя свойство аддитивности, запишем

$$\Pi = \iint_{\sigma}(\bar{a},\bar{n})d\sigma = \iint_{\Delta ABC}(\bar{a},\bar{n}_1)d\sigma + \iint_{\Delta AOC}(\bar{a},\bar{n}_2)d\sigma + \iint_{\Delta AOB}(\bar{a},\bar{n}_3)d\sigma + \iint_{\Delta COB}(\bar{a},\bar{n}_4)d\sigma$$

Вычислим поток через поверхность ΔABC, уравнение которой $x + y + z = 1$. Внешняя нормаль к данной поверхности

$$\bar{n}_1 = \frac{grad\ F_1}{|grad\ F_1|} = \frac{\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{3}}, \quad \text{где} \quad F_1 = x + y + z - 1.$$

Следовательно, $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Вычисляем поток проектированием на плоскость *XOY*

$$\Pi_1 = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{(\bar{a},\bar{n}_1)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=z(x,y)} dxdy = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{\dfrac{(x-2z)+(3z-4x)+(5x+y)}{\sqrt{3}}}{\left|\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right|}\right|_{z=1-x-y}^{1} dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}}[2x + y + (1 - x - y)]dxdy = \int_0^1 (x+1)dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)dx = \frac{2}{3}$$

Вычислим поток через поверхность ΔBOC, лежащей в плоскости *YOZ*. В этом случае вектор нормали к внешней стороне $\bar{n}_4 = -\bar{i}$, уравнение плоскости ΔBOC: $x = 0$. Поток векторного поля $\bar{a}(M)$ вычисляем, проектируя на плоскость *YOZ*.

$$\Pi_4 = \iint_{\Delta COB} \left.\frac{(\bar{a},\bar{n}_4)}{|\cos\alpha|}\right|_{x=x(y,z)} dydz = \iint_{\Delta COB} \left.\frac{-(x-2z)}{|-1|}\right|_{x=0} dydz =$$

$$= \iint_{\Delta COB} 2zdydz = \int_0^1 2zdz \int_0^{1-z} dy = 2\cdot\int_0^1 z(1-z)dz = 2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Аналогично вычисляются потоки через поверхности ΔCOA и $\Delta\ AOB$:

$$\Pi_2 = \iint_{\Delta COA}(\bar{a},\bar{n}_2)d\sigma = \frac{1}{6}$$

$$\Pi_3 = \iint_{\Delta AOB}(\bar{a},\bar{n}_3)d\sigma = -1$$

В результате $\Pi = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} - 1 = \dfrac{1}{6}$

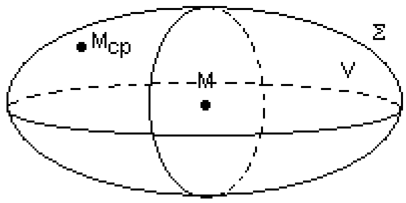
Теперь решим данную задачу с помощью теоремы Остроградского - Гаусса. Найдем

$$div\,\overline{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x-2z)+\frac{\partial}{\partial y}(3z-4x)+\frac{\partial}{\partial z}(5x+y)=1+0+0=1$$

Вычислим $\Pi = \iiint\limits_V div\,\overline{a}dv = \iiint\limits_V dv = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$ (объем пирамиды).

Таким образом, двумя способами мы получили, что поток векторного поля $\overline{a}(M)$ через полную поверхность пирамиды равен $\frac{1}{6}$. При этом использование теоремы Остроградского – Гаусса существенно облегчает процесс вычисления потока.

Поясним физический смысл понятия дивергенции. Для данной точки *M* возьмем замкнутую двустороннюю поверхность *Σ*, ограничивающую объем *V* , содержащий эту точку.



Для данного векторного поля $\overline{a}(M)$ мы можем написать формулу Остроградского – Гаусса

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma}(\overline{a}, d\sigma) = \iiint\limits_V div\,\overline{a}dv$$

При сформулированных выше условиях на $\overline{a}(M)$ мы можем применить теорему о среднем для интеграла

$$\Pi = V\cdot div\,\overline{a}(M_{cp}),$$

где M_{cp} - некоторая точка, содержащаяся в *V*, откуда

$$div\,\overline{a}(M_{cp}) = \frac{\Pi}{V}.$$

Стянем поверхность *Σ* к точке *M*. При этом $M_{cp}\to M$, и из непрерывности $div\,\overline{a}$ следует, что $div\,\overline{a}(M_{cp})\to div\,\overline{a}(M)$. Поэтому

$$div\,\bar{a}(M) = \lim_{\Sigma \to M} \frac{\iint\limits_{\Sigma} (\bar{a}, d\sigma)}{V}\ .$$

Выражение в правой части естественно называть плотностью потока векторного поля $\bar{a}$ в точке *M*.

Поэтому мы получаем, что дивергенция векторного поля равна плотности потока этого поля. Одновременно нами доказана инвариантность дивергенции, поскольку она определена через инвариантные величины.

Циркуляция векторного поля

<u>*Определение*</u> *11. Циркуляцией* векторного поля $\bar{a}(M)$ вдоль замкнутого контура *C* называется криволинейный интеграл 2-го типа от векторного поля $\bar{a}(M)$ по контуру *C*

$$Ц = \oint\limits_{C} (\bar{a}, \bar{\tau}) ds = \oint\limits_{C} (\bar{a}, d\bar{\tau})\,.$$

Символ $\oint\limits_{C}$ обозначает интегрирование по замкнутому контуру *C*.

Если

$$\bar{a}(M) = P(x,y,z) \cdot \bar{i} + Q(x,y,z) \cdot \bar{j} + R(x,y,z) \cdot \bar{k}\ ,$$

то циркуляция записывается в виде

$$Ц = \int\limits_{C} Pdx + Qdy + Rdz\ .$$

Если контур *C* расположен в силовом поле $\bar{a}(M)$, то циркуляция - это работа силы $\bar{a}(M)$ при перемещении материальной точки вдоль *C*.

<u>*Замечание*</u>. Криволинейный интеграл 2-го типа от векторного поля $\bar{a}(M)$ по контуру *L* называется иначе *линейным интегралом* векторного поля $\bar{a}(M)$ вдоль линии *L*.

Теорема Стокса

<u>*Теорема Стокса*</u>. Пусть в области *V* задано векторное поле $\bar{a}(M) = P(x,y,z) \cdot \bar{i} + Q(x,y,z) \cdot \bar{j} + R(x,y,z) \cdot \bar{k}$, где *P, Q, R* – непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области функции;
σ -кусочно-гладкая поверхность, лежащая в этой области и ограниченная контуром *C*. Единичный вектор нормали $\bar{n}$ к поверхности σ выбирается так, чтобы направление обхода по контуру *C* было видно с конца вектора $\bar{n}$

совершающимся против часовой стрелки (правый винт). Тогда поток ротора через поверхность σ равен циркуляции поля $\bar{a}(M)$ по границе C этой поверхности, т.е. справедлива формула Стокса

$$\iint_{\sigma} (rot\,\bar{a}, \bar{n})\, d\sigma = \oint_{C} (\bar{a}, d\bar{\tau}).$$

В декартовой системе координат эта формула имеет вид

$$\iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \cos\gamma \right] d\sigma =$$
$$= \oint_{C} Pdx + Qdy + Rdz$$

Здесь $\bar{n} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \bar{k}$ - единичный вектор нормали в точках поверхности σ.

Ещё одна форма записи теоремы Стокса

$$\oint_{C} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\sigma} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

Для плоского векторного поля $\bar{a}(M) = P(x, y) \cdot \bar{i} + Q(x, y) \cdot \bar{j}$, предполагая, что контур C лежит в плоскости XOY, имеем *формулу Грина*

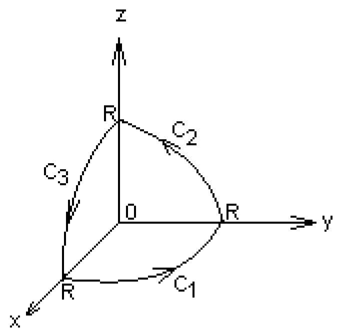
$$\iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{C} Pdx + Qdy.$$

Таким образом, формула Грина есть частный случай формулы Стокса. Ориентация на C выбирается таким образом, что при интегрировании по C область D остается слева (положительная ориентация).

Пример. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M) = -y^2 \cdot \bar{i} + x^2 \cdot \bar{j} + \bar{k}$ вдоль контура C, образованного пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с координатными плоскостями.

Решение. Данная задача может быть решена двумя способами: непосредственным вычислением циркуляции, либо по теореме Стокса.

Вычислим циркуляцию непосредственно.



Контур *C* является кусочно-гладким и состоит из трех частей: $C_1,\ C_2, C_3$. Поэтому по свойству аддитивности $Ц = Ц_1 + Ц_2 + Ц_3 = \oint\limits_{C_1} \bar{a}d\bar{\tau} + \oint\limits_{C_2} \bar{a}d\bar{\tau} + \oint\limits_{C_3} \bar{a}d\bar{\tau}$.

На линии C_1: $z = 0,\ x^2 + y^2 = R^2$

$$Ц_1 = \oint\limits_{C_1} \bar{a}d\bar{\tau} = \oint\limits_{C_1} -y^2dx + x^2dy + dz =$$

(замена: $x = R\cdot\cos t,\ y = R\cdot\sin t,\ z = 0,\ 0 \le \mathrm{t} \le \pi/2$)

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left[-R^2\sin^2 t\cdot(-R\sin t) + R^2\cos^2 t\cdot R\cos t\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left[R^3\sin^3 t + R^3\cos^3 t\right]dt = \frac{4}{3}R^3$$

На линии C_2: $x = 0,\ y^2 + z^2 = R^2$

$$Ц_2 = \oint\limits_{C_2} \bar{a}d\bar{\tau} = \oint\limits_{C_2} -y^2dx + x^2dy + dz = \oint\limits_{C_2} dz = \int\limits_0^1 dz = 1$$

На линии C_3: $y = 0,\ x^2 + z^2 = R^2$

$$Ц_3 = \oint\limits_{C_3} \bar{a}d\bar{\tau} = \oint\limits_{C_3} -y^2dx + x^2dy + dz = \oint\limits_{C_3} dz = \int\limits_0^1 dz = -1$$

Поэтому $Ц = \dfrac{4}{3}R^3$.

Теперь воспользуемся <u>формулой Стокса</u> для нахождения циркуляции.

Найдем внешнюю нормаль к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Положим $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Тогда

$$grad\ F = 2x \cdot \bar{i} + 2y \cdot \bar{j} + 2z \cdot \bar{k},$$

$$\bar{n} = \frac{grad\ F}{|grad\ F|} = \frac{2\left(x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}\right)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}}{R}.$$

Вычислим ротор поля $\bar{a}(M) = -y^2 \cdot \bar{i} + x^2 \cdot \bar{j} + \bar{k}$.

$$rot\ \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x^2 & 1 \end{vmatrix} = 2(x+y) \cdot \bar{k}.$$

Скалярное произведение $rot\ \bar{a}$ на нормаль $\bar{n}$ равно выражению

$$(rot\ \bar{a}, \bar{n}) = \frac{2}{R}(x+y)z$$

Тогда по формуле Стокса

$$Ц = \iint_\sigma \frac{2}{R}(x+y)z\, d\sigma = (\text{замена} \left\{ \begin{array}{l} x = R \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = R\cos\theta \\ d\sigma = R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \\ 0 \le \varphi \le \pi/2, \quad 0 \le \theta \le \pi/2 \end{array} \right.) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{2}{R}\left[R \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi + R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi\right] R\cos\theta \cdot R^2 \sin\theta\, d\theta =$$

$$= 2R^3 \int_0^{\pi/2} \left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cdot \cos\theta\, d\theta =$$

$$= 2R^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}R^3$$

<u>Ответ</u>: $Ц = \dfrac{4}{3}R^3$.

Содержание

Введение……………………………………………………………3
Методические указания…………………………………………....4
Основные типы задач курса математического анализа (2 семестр)
Часть1. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования.
Определенный интеграл и его приложения……………………8
Часть 2. Типовой расчет.
Несобственные интегралы. Двойной и тройной интегралы, приложения. Криволинейные интегралы. Теория поля………17
Приложение…………………………………………………………35