Лекция
по линейной алгебре.
Преобразование общих уравнений кривой и поверхности второго порядка

ПРИВЕДЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Теперь рассмотрим эту же квадратичную форму в геометрической «ипостаси». Для понимания следующего примера нужно ориентироваться (хотя бы в общих чертах) в **линиях второго порядка**:

Классификация линий второго порядка

С помощью специального комплекса действий любое уравнение линии второго порядка приводится к одному из следующих видов:

(a и b – положительные действительные числа)

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$ – каноническое уравнение эллипса;

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение гиперболы;

3) $y^2=2px \quad (p>0)$ – каноническое уравнение параболы;

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ – **мнимый** эллипс;

5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара пересекающихся прямых;

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара **мнимых** пересекающихся прямых (с единственной действительной точкой пересечения в начале координат);

7) $y^2-a^2=0$ – пара параллельных прямых;

8) $y^2+a^2=0$ – пара **мнимых** параллельных прямых;

9) $y^2=0$ – пара совпавших прямых.

Пример

С помощью теории квадратичных форм привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду

$x^2+y^2-4xy=1$

Иными словами, нам нужно выяснить, какую линию задаёт это уравнение (*эллипс, гиперболу, параболу или какую-то другую*) и записать его в каноническом виде.

Итак, на первом шаге рассматриваем квадратичную форму x^2+y^2-4xy, записываем её матрицу и находим её собственные числа.

Решение: запишем матрицу формы $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ и из уравнения $\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$ найдём её собственные числа:

$(1-\lambda)(1-\lambda)-(-2)\cdot(-2)=0$

$(1-\lambda)^2-4=0$

$(1-\lambda)^2=4$

Очевидно, что $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=3$, таким образом:

$Q(x',y')=\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2$ – квадратичная форма в каноническом виде.

В первом случае у нас получится уравнение $-(x')^2+3(y')^2=1$, во втором: $3(x')^2-(y')^2=1$.

Найдём соответствующее линейное преобразование. Для этого нужно отыскать собственные векторы матрицы A:

1) Если $\lambda=\lambda_1=-1$, то получаем систему линейных уравнений:

$\begin{cases}2\alpha-2\beta=0\\ -2\alpha+2\beta=0\end{cases}$, откуда следует, что $\alpha=\beta$.

Полагая $\alpha=\beta=1$, запишем первый собственный вектор: $\bar{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ – **координаты удобно записывать именно в столбец!** Сразу вычислим длину вектора (скоро потребуется):

$|\bar{u}_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

2) Если $\lambda=\lambda_2=3$, то имеем систему:

$\begin{cases}-2\alpha-2\beta=0\\ -2\alpha-2\beta=0\end{cases}$, из которой следует, что $\beta=-\alpha$

Пусть $\alpha=1$, тогда $\beta=-1$ и $\bar{u}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ – второй собственный вектор. Его длина:

$|\bar{u}_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Если матрица формы имеет <u>различные</u> собственные числа, то соответствующие собственные векторы попарно ортогональны.
Убедимся в справедливости этого утверждения для нашей пары, вычислив их **скалярное произведение**:
$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_1 \perp \bar{u}_2$

Поскольку длины векторов $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ не равны единице, то их нужно *нормировать*, т.е. найти *коллинеарные* им векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ единичной длины.
Для этого каждую координату собственного вектора делим на его длину:

$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – координаты на $|\bar{u}_1| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$;

$\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ – координаты на $|\bar{u}_2| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Проверим, что длины полученных векторов действительно равны единице:
$$|\bar{e}_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1, \quad |\bar{e}_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$
, ч.т.п.

После чего возникает недавний вопрос – <u>в каком порядке</u> их следует перечислить: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ или $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$? Когда мы просто приводили форму к каноническому виду, это не имело значения. Но вот тут имеет.
В первом случае у нас получится уравнение $-(x')^2 + 3(y')^2 = 1$, во втором: $3(x')^2 - (y')^2 = 1$. Оба уравнения задают **гиперболу**, однако канонический вид имеет только второе уравнение. Таким образом, нас устраивает «комплект» $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$, но НЕ ФАКТ, что подойдет найденное преобразование $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

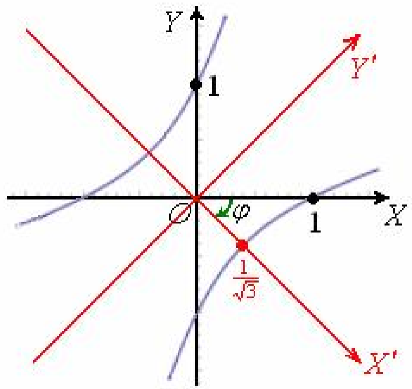
Дело в том, что ортонормированные собственные векторы можно выбрать ещё тремя способами: $-\bar{e}_1, \bar{e}_2$, $\bar{e}_1, -\bar{e}_2$ или $-\bar{e}_1, -\bar{e}_2$, и если бы мы просто приводили форму к каноническому виду, то опять же – нас устроил бы любой из 4 вариантов. Но не сейчас.

По той причине, что линейные преобразования должны соответствовать формулам **формулами поворота** $\begin{matrix} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{matrix}$ **декартовой системы координат** XOY на угол «фи». Этот факт справедлив только в том случае, если определитель матрицы преобразования равен «плюс» единице: $|P| = 1$.

Проверяем: $|P| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, таким образом, нам повезло, и преобразование $\begin{matrix} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{matrix}$ действительно подходит под шаблон $\begin{matrix} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{matrix}$.

Значениям $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ соответствует **табличный** угол $\frac{7\pi}{4}$, но привычнее, конечно, говорить об угле $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Таким образом, поворачивая систему XOY на 45 градусов по часовой стрелке, мы переходим от уравнения $x^2 + y^2 - 4xy = 1$ в старой системе координат к каноническому уравнению $3(x')^2 - (y')^2 = 1$ в новой системе координат $X'OY'$:



Наклоните голову вправо на 45 градусов и убедитесь, что в «красной» системе координат гипербола действительно имеет канонический вид.

Кроме того, нас устроило бы ещё одно преобразование: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Легко видеть, что его определитель равен «плюс» единице и формулам $\begin{aligned} x &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{aligned}$ соответствует поворот системы XOY на $\frac{3\pi}{4}$ против часовой стрелки. В этом случае оси OX', OY' будут «смотреть» в противоположные стороны и гипербола тоже окажется в каноническом положении. Желающие могут повернуть голову влево на 135 градусов и приобщиться к прекрасному :)

Ответ: $3(x')^2 - (y')^2 = 1$

Что произойдёт, если квадратичную форму $x^2 + y^2 - 4xy$ приводить к каноническому виду **методом Лагранжа**? В общем случае будут получаться другие гиперболы. Но гиперболы! И вообще – любое *невырожденное* линейное преобразование данной формы будет приводить нас к уравнениям гипербол, и только к ним – как я отмечал в конце предыдущего урока, такое преобразование не меняет СУЩНОСТИ формы.

Таким образом, метод Лагранжа – это «быстрый» способ узнать, что это за линия, но вот сохранение её размеров нам гарантирует лишь ортогональное преобразование.

Ортогональное линейное преобразование переводит ортонормированный базис в другой ортонормированный базис и сохраняет размеры объектов. Это справедливо для пространства любой размерности, и, кроме того, применимо не только к квадратичным формам – **ортогональному преобразованию** *(Вики)* посвящена отдельная тема высшей алгебры, и интересующихся я отсылаю к соответствующим источникам информации.

Пример для самостоятельного решения

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом ортогонального преобразования.

$$13x_1^2 + 18x_1x_2 + 37x_2^2$$

Решить задачу двумя способами (переставляя собственные числа) и записать матрицы соответствующих линейных преобразований

Пример 12

Привести каноническую форму к каноническому виду методом ортогонального преобразования.

$13x_1^2+18x_1x_2+37x_2^2$

Решить задачу двумя способами (переставляя собственные числа) и записать матрицы соответствующих линейных преобразований.

Пример 12. ***Решение:*** *запишем матрицу формы*

$$A=\begin{pmatrix}13 & 9\\ 9 & 37\end{pmatrix}$$ *и найдём её собственные числа:*

$$\begin{vmatrix}13-\lambda & 9\\ 9 & 37-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(13-\lambda)(37-\lambda)-81=0$$

$$\lambda^2-50\lambda+481-81=0$$

$$\lambda^2-50\lambda+400=0$$

Решим ***квадратное уравнение****:*

$$D=2500-1600=900 \quad \sqrt{D}=30$$

$$\lambda_1=\frac{50-30}{2}=10,\ \lambda_2=\frac{50+30}{2}=40$$ *– собственные числа, таким образом:*

$10y_1^2+40y_2^2$ *– форма* $13x_1^2+18x_1x_2+37x_2^2$ *– в каноническом виде.*

Найдём собственные векторы, их длины и при необходимости выполним нормирование:

1) Если $\lambda = \lambda_1 = 10$, *то:*

$$\begin{cases} 3\alpha + 9\beta = 0 \\ 9\alpha + 27\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = -3\beta$$, *пусть* $\beta = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3$

Таким образом: $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$|\bar{u}_1| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \neq 1$.

Разделим каждую координату на длину: $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

2) Если $\lambda = \lambda_2 = 40$, *то:*

$$\begin{cases} -27\alpha + 9\beta = 0 \\ 9\alpha - 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \beta = 3\alpha$$, *пусть* $\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 3$

Таким образом: $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$|\bar{u}_2| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица линейного преобразования:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Выполним проверку прямой подстановкой

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}y_2$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_2$$ в $13x_1^2 + 18x_1x_2 + 37x_2^2$:

$$13\left(\frac{3}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}y_2\right)^2 + 18\left(\frac{3}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}y_2\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_2\right) + 37\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{10}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{10}}y_1\right)^2 =$$

$$= 13\left(\frac{9}{10}y_1^2 + \frac{6}{10}y_1y_2 + \frac{1}{10}y_2^2\right) + 18\left(-\frac{3}{10}y_1^2 + \frac{8}{10}y_1y_2 + \frac{3}{10}y_2^2\right) + 37\cdot\left(\frac{9}{10}y_2^2 - \frac{6}{10}y_1y_2 + \frac{1}{10}y_1^2\right) =$$

$$= \frac{117}{10}y_1^2 + \frac{78}{10}y_1y_2 + \frac{13}{10}y_2^2 - \frac{54}{10}y_1^2 + \frac{144}{10}y_1y_2 + \frac{54}{10}y_2^2 + \frac{333}{10}y_2^2 - \frac{222}{10}y_1y_2 + \frac{37}{10}y_1^2 =$$

$$= \frac{117-54+37}{10}y_1^2 + \frac{78+144-222}{10}y_1y_2 + \frac{13+54+333}{10}y_2^2 =$$

$$= \frac{100}{10}y_1^2 + \frac{0}{10}y_1y_2 + \frac{400}{10}y_2^2 = 10y_1^2 + 40y_2^2$$, *что и требовалось проверить.*

Ответ: $10y_1^2 + 40y_2^2$,

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$, *в случае перестановки собственных чисел:*

$40y_1^2 + 10y_2^2$,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Пример 13

$$13x^2+18xy+37y^2-26x-18y-27=0$$

Данную линию привести к каноническому виду, используя новый метод.

Надеюсь все прорешали предыдущее задание, поскольку начало решения будет совпадать с точностью до обозначений, и нам осталось выбрать подходящее преобразование:

$$13x^2+18xy+37y^2 \quad\Rightarrow\quad 10(x')^2+40(y')^2$$

или

$$13x^2+18xy+37y^2 \quad\Rightarrow\quad 40(x')^2+10(y')^2$$

Очевидно, здесь получится уравнение эллипса $\frac{(x'')^2}{a^2}+\frac{(y'')^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$, и чтобы выдерживалось неравенство полуосей, нам подойдёт МЕНЬШИЙ коэффициент при переменной «икс штрих», то есть, следует выбрать первый вариант:

$$13x^2+18xy+37y^2 \quad\Rightarrow\quad 10(x')^2+40(y')^2$$

В своём образце решения я сразу выбрал подходящее преобразование

$$x=\frac{3}{\sqrt{10}}x'+\frac{1}{\sqrt{10}}y'$$

$$y=-\frac{1}{\sqrt{10}}x'+\frac{3}{\sqrt{10}}y'$$

, определяющее поворот на угол $\varphi=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\approx-18^\circ$, но у вас мог получиться и любой другой их трёх оставшихся случаев (в зависимости от выбора собственных векторов).

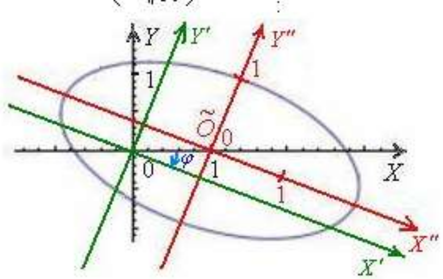
Преобразование $\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ тоже приемлемо (поворот примерно на $162°$), а вот $\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ непригодны, так как не соответствуют формулам $\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned}$.

Итак, в результате замен $\begin{aligned} x &= \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y' \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y' \end{aligned}$ исходное уравнение $13x^2+18xy+37y^2-26x-18y-27=0$ преобразуется к виду:

$$10(x')^2+40(y')^2-26\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x'+\frac{1}{\sqrt{10}}y'\right)-18\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}x'+\frac{3}{\sqrt{10}}y'\right)-27=0$$

$$10(x')^2+40(y')^2-\frac{60}{\sqrt{10}}x'-\frac{80}{\sqrt{10}}y'-27=0$$

Данное уравнение задаёт тот же самый эллипс в системе $X'OY'$ *(зелёный цвет)*, которая получена поворотом системы XOY на угол $\varphi=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\approx-18°$:



Осталось провести **параллельный перенос координатных осей**. Выделяем полные квадраты:

$$10(x')^2-\frac{60}{\sqrt{10}}x'+40(y')^2-\frac{80}{\sqrt{10}}y'-27=0$$

$$10\left((x')^2-\frac{6}{\sqrt{10}}x'\right)+40\left((y')^2-\frac{2}{\sqrt{10}}y'\right)-27=0$$

$$10\left((x')^2-\frac{2\cdot 3}{\sqrt{10}}x'+\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2\right)-10\cdot\frac{9}{10}+40\left((y')^2-\frac{2}{\sqrt{10}}y'+\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2\right)-40\cdot\frac{1}{10}-27=0$$

$$10\left(x'-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2-9+40\left(y'-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2-4-27=0$$

$$10\left(x'-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2+40\left(y'-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2-40=0$$

И в результате замен $x'-\frac{3}{\sqrt{10}}=x''$, $y'-\frac{1}{\sqrt{10}}=y''$ получаем каноническое уравнение эллипса в «красной» системе $X''\tilde{O}Y''$:

$$10(x'')^2+40(y'')^2=40$$

$$\frac{(x'')^2}{4}+(y'')^2=1$$

Ответ: $\frac{(x'')^2}{2^2}+(y'')^2=1$

Пример для самостоятельного решения

Пример

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 6y + 4 = 0$$

– привести уравнение линии к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования квадратичной формы.

<u>Пример 14</u>

$x^2-2xy+y^2-2x+6y+4=0$ – привести уравнение линии к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования квадратичной формы.

Пример 14. ***Решение:*** *запишем матрицу*

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ *квадратичной формы и найдём её собственные числа:*

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)^2-1=0$$

$$(1-\lambda)^2=1$$

так как каноничная парабола определяется уравнением $(y'')^2=2px''$ *, то нам нужно перечислить собственные числа в следующем порядке:*

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=2$

Таким образом, квадратичная форма преобразуется к виду:

$$x^2-2xy+y^2\quad\Rightarrow\quad 0\cdot(x')^2+2(y')^2=2(y')^2.$$

Найдём собственные векторы и при необходимости выполним их нормирование:

1) Если $\lambda = \lambda_1 = 0$, *то:*

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \beta \text{, пусть } \alpha = 1 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\bar{u}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

2) Если $\lambda = \lambda_2 = 2$, *то:*

$$\begin{cases} -\alpha - \beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = -\beta \text{, пусть } \beta = 1 \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Примечание: *вектор* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *в пару к* $\bar{u}_1$ *не годится, т.к. линейное преобразование не будет соответствовать формулам поворота.*

$$|\bar{u}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица линейного преобразования:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ *, которое по формулам* $$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{aligned}$$ *приводит уравнение к виду:*

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 6y + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(y')^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 4 = 0$$

Однако, после раскрытия скобок, выясняется, что знак при переменной x' *не приведёт нас каноническому виду* $(y'')^2 = 2px''$.

И поэтому нужно выбрать другое преобразование, определитель которого $|P| = 1$. *Этому критерию подходит пара ортонормированных векторо*

в $-\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $-\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, *задающая преобразование* $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ *с поворотом* $\begin{matrix} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{matrix}$ *на* $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$

рад. (–135 градусов) (это угол ***табличный****: значениям* $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ *соответствует* $\frac{5\pi}{4}$ *или* $-\frac{3\pi}{4}$ *рад.)*

Таким образом, данное преобразование приводит нас к уравнению:

$$2(y')^2 - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 6\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 4 = 0$$

$$2(y')^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{2}{\sqrt{2}}y' - \frac{6}{\sqrt{2}}x' - \frac{6}{\sqrt{2}}y' + 4 = 0$$

$$2(y')^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x' - \frac{8}{\sqrt{2}}y' + 4 = 0$$

$$(y')^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{4}{\sqrt{2}}y' + 2 = 0$$

избавимся от иррациональности в знаменателях, домножив числители и знаменатели на $\sqrt{2}$:

$$(y')^2 - \sqrt{2}x' - 2\sqrt{2}y' + 2 = 0$$

$$(y')^2 - 2\sqrt{2}y' + 2 = \sqrt{2}x'$$

«собираем» полный квадрат при переменной y':

$(y' - \sqrt{2})^2 = \sqrt{2}x'$ *и проводим замены* $\begin{matrix} x' = x'' \\ y' - \sqrt{2} = y'' \end{matrix}$.

Ответ: $y''^2 = \sqrt{2}x''$

Кстати, как быстро и даже устно определить тип линии? Если **определитель** **матрицы формы**

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, то перед нами линия ***эллиптического*** типа *(эллипс, мнимый эллипс или пара мнимых пересекающихся прямых)*, если $|A| < 0$ – то ***гиперболического*** *(гипербола или пара пересекающихся прямых)*, и если

$|A| = 0$ – то ***параболического*** *(парабола, пара параллельных (мнимых или обычных) или пара совпавших прямых)*.

В заключение кратко о геометрическом смысле ортогонального преобразования формы трёх переменных. Даже добавлять константу не буду:

$2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xy - 2xz + 4yz = 0$ – данное уравнение определяет некоторую **поверхность второго порядка** в «школьном» базисе $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$.

Проведённое ортогональное преобразование осуществляет переход к другому ортонормированному базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ – ТАКОМУ, в котором данная поверхность имеет канонический вид:

$3(x')^2 + 3(y')^2 - 3(z')^2 = 0$ – откуда сразу понятно, что это **коническая поверхность**, причём, ортогональное преобразование сохранило её размеры. Кстати, перед нами **конус вращения**, и теперь стало ясно, почему существует бесконечно много пригодных ортогональных преобразований: связку векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ мы можем «повернуть в горизонтальной плоскости» как угодно, и во всех полученных базисах $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ коническая поверхность будет иметь канонический вид.

Саму же разновидность поверхности можно выяснить быстрее – **методом Лагранжа**, но он в общем случае будет «показывать» нам конусы других размеров.

Пример для самостоятельного решения

Приведите уравнение поверхности

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$$

к каноническому виду.

Приведите уравнение поверхности

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$$

к каноническому виду.
Решение. Квадратичная форма имеет вид

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz.$$

Выписываем ее матрицу

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}.$$

Находим ее собственные числа. Для этого запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&3\\1&5-\lambda&1\\3&1&1-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

После вычисления определителя получим

$$-\lambda^3+7\lambda^2-36=0.$$

Подбором находим один корень $\lambda_1=3$. Преобразуем уравнение, выделяя множитель $\lambda-3$

$$-\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda^2-12\lambda+12\lambda-36=0$$

или

$$-\lambda^2(\lambda-3)+4\lambda(\lambda-3)+12(\lambda-3)=0,$$

откуда

$$(\lambda-3)(\lambda^2-4\lambda-12)=0.$$

Находим два других корня характеристического уравнения $\lambda_2=6$ и $\lambda_3=-2$.

Находим собственные векторы. Для собственного числа $\lambda_1 = 3$ для координат собственного вектора α получим систему уравнений

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая ее находим, что фундаментальная система решений содержит только одно решение, и в качестве собственного вектора можно взять $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для собственного числа $\lambda_2 = 6$ для координат собственного вектора β получим систему уравнений

$$\begin{cases} -5\beta_1 + \beta_2 + 3\beta_3 = 0, \\ \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = 0, \\ 3\beta_1 + \beta_2 - 5\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим собственный вектор $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для собственного числа $\lambda_3 = -2$ для координат собственного вектора γ получим систему уравнений

$$\begin{cases} 3\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 7\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ 3\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим собственный вектор $\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Легко проверить, что $(\alpha,\beta)=(\alpha,\gamma)=(\beta,\gamma)=0$, то есть собственные векторы попарно ортогональны. Их длины равны соответственно $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$. Поэтому векторы нового ортонормированного базиса будут иметь координаты

$$\mathbf{i}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad \mathbf{j}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\quad \mathbf{k}'=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Матрица перехода имеет вид

$$S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Старые координаты связаны с новыми уравнением $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$, то есть

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'-\frac{1}{\sqrt{2}}z',\quad y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{2}{\sqrt{6}}y',\, z=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'. \tag{19.10}$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение. Квадратичная форма примет вид, в котором произведения переменных будут отсутствовать, а коэффициентами при квадратах будут служить собственные числа

$$3(x')^2+6(y')^2-2(z')^2-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'-\frac{1}{\sqrt{2}}z'\right)+$$
$$+6\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{2}{\sqrt{6}}y'\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'\right)=0.$$

Приводим подобные члены

$$3(x')^2+6(y')^2-2(z')^2-\frac{6}{\sqrt{3}}x'+\frac{12}{\sqrt{6}}y'+\frac{4}{\sqrt{2}}z'=0.$$

Выделим полные квадраты

$$3\left((x')^2-\frac{2}{\sqrt{3}}x'+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)-1+6\left((y')^2+\frac{2}{\sqrt{6}}y'+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2\right)-1-$$
$$-2\left((z')^2-\frac{2}{\sqrt{2}}z'+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)+1=0$$

или

$$3\left(x'-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+6\left(y'+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2-2\left(z'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1.$$

Выполняем параллельный перенос осей координат

$$\tilde{x}=x'-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \tilde{y}=y'+\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \tilde{z}=z'-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Новое начало системы координат O_1 имеет координаты $x'=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad y'=-\frac{1}{\sqrt{6}},\quad z'=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

В исходной системе координат точка O_1 в соответствии с формулами (19.10) имеет координаты

$$x=-\frac{1}{3},\quad y=-\frac{2}{3},\quad z=\frac{2}{3}.$$

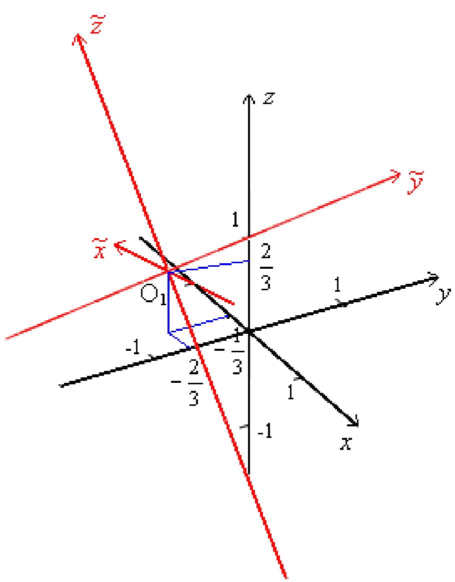
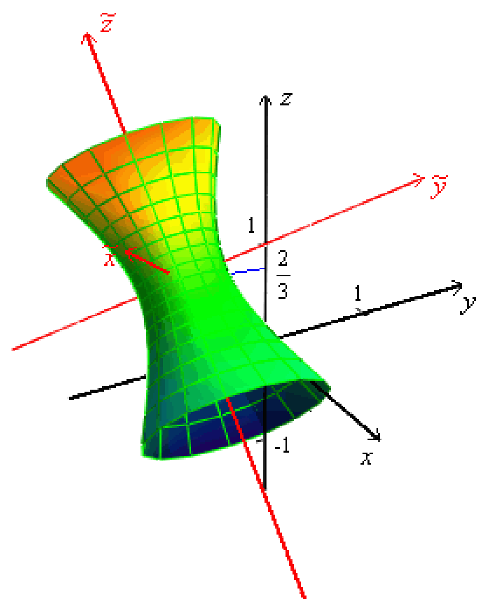


Рис.19.9.Система координат $O_1\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$

В новой системе координат $O_1\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ (рис. 19.9) уравнение принимает канонический вид

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{\tilde{z}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$$

Это уравнение является каноническим уравнением однополостного гиперболоида. Его центр находится в точке O_1, две вещественные оси параллельны векторам $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, вещественные полуоси равны $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}$. Мнимая ось параллельна вектору $\mathbf{k}'$, мнимая полуось равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Изображение гиперболоида приведено на рисунке.



Спасибо за внимание!