Лекция 11
Преобразование квадратичных форм. Приведение к каноническому виду методом Лагранжа

Ортогональные матрицы

Рассмотрим евклидово n-мерное пространство E_n. Для любых двух векторов

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n, \qquad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$$

в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ скалярное произведение выражается формулой

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n. \tag{11.28}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{11.29}$$

называется ***ортогональной***, если соответствующая ей система векторов

$$a_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}),\ a_2(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}),\ \ldots,\ a_n(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}) \tag{11.30}$$

является ортонормированной.

В соответствии с формулой (11.28) получаем

$$(a_i, a_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}. \tag{11.31}$$

Векторы (11.30) будут ортонормированными, если

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1 & при \quad i = j, \\ 0 & при \quad i \neq j \end{cases} \tag{11.32}$$

для любых i, j $(i = 1, 2, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Примеры ортогональных матриц:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что единичная матрица любого порядка является ортогональной.

Теорема *Необходимое и достаточное условие ортогональности матрицы A выражается равенством*

$$A^T A = E\ , \qquad (11.33)$$

где A^T - матрица, полученная из матрицы A транспонированием; E - единичная матрица того же порядка, что и A.

Следствие 1 *Модуль определителя ортогональной матрицы равен* 1.

Действительно, из (11.33) получаем $\det\left(A^T A\right) = \det E$, $\det A^T \cdot \det A = \det E$, $\det A \cdot \det A = \det E$, $(\det A)^2 = 1$, $\det A = \pm 1$, $|\det A| = 1$.

Следствие 2 *Ортогональная матрица является невырожденной матрицей.* Это следует из предыдущего утверждения.

Следствие 3 *Произведение двух ортогональных матриц есть ортогональная матрица.*

Пусть A и B - ортогональные матрицы одного порядка. Так как $(AB)^T = B^T A^T$, то $(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T\left(A^T A\right)B = B^T EB = B^T B = E$, т.е. $(AB)^T(AB) = E$. На основании (11.33) заключаем, что AB - ортогональная матрица.

Следствие 4 *Равенство* $A^T = A^{-1}$ *выражает необходимое и достаточное условие ортогональности матрицы* A.

В самом деле, если A - ортогональная матрица, то $A^T A = E$. С другой стороны, $A^{-1}A = E$. Из этих двух равенств следует, что $A^T = A^{-1}$.

Обратно, пусть $A^T = A^{-1}$, тогда отсюда и из равенства $A^{-1}A = E$ следует $A^T A = E$, т.е. A - ортогональная матрица.

Следствие 5 *Матрица, полученная транспонированием ортогональной матрицы – ортогональна.*

Если A - ортогональная матрица, то $\left(A^T\right)^T A^T = AA^T = AA^{-1} = E$, или $\left(A^T\right)^T A^T = E$. В силу (11.33) это означает, что A^T - ортогональная матрица.

Следствие 6 *Матрица, обратная ортогональной матрице, - ортогональна.*

Замечание 1. Из условия $\det A = \pm 1$ не следует, что A - ортогональная матрица. Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, для которой $\det A = 1$, не будет ортогональной, так как $A^T A \neq E$.

Замечание 2. Сумма ортогональных матриц не является ортогональной матрицей.

Замечание 3. Необходимое и достаточное условие ортогональности матрицы A можно выразить равенством $A^T A = E$.

Теорема *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису является ортогональной.*

Ортогональные операторы

Линейный оператор f евклидова пространства E называется ***ортогональным***, если для любых $x,\ y \in \mathrm{E}$ выполняется условие

$$(x, y) = (f(x), f(y)).$$

Теорема *Для того чтобы оператор $f:\mathrm{E} \to \mathrm{E}$ был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в ортонормированном базисе была ортогональна.*

Теорема *Для того чтобы линейный оператор евклидова пространства был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы он ортонормированный базис переводил в ортонормированный.*

Теорема *Для того чтобы линейный оператор был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы он не менял длину вектора.*

Для ортогонального оператора справедливы следующие утверждения.

1. *Ортогональный оператор – невырожденный.*

2. *Для ортогонального оператора существует обратный оператор, который также является ортогональным.*

3. *Если* A *- матрица ортогонального оператора, то* A^T *- матрица оператора, обратного данному.*

4. *Произведение ортогональных операторов также является ортогональным оператором.*

Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Докажем, что действительную квадратичную форму можно привести к каноническому виду с помощью ортогонального оператора.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D. \tag{12.1}$$

Далее, также из курса аналитической геометрии мы знаем, что можно совершить такой поворот осей координат на некоторый угол α, т. е. такой переход от координат x, y к координатам x', y':

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{cases} \tag{12.2}$$

что в новых координатах уравнение кривой будет иметь ***канонический*** вид

$$A'x'^2 + C'y'^2 = D. \tag{12.3}$$

В уравнении (12.3) коэффициент при произведении неизвестных $x'y'$ равен нулю. Преобразование координат (12.2) можно толковать, очевидно, как линейное, т.е. как линейный оператор. Этот оператор применяется к левой части уравнения (12.1), и поэтому можно сказать, что левая часть уравнения (12.1) невырожденным линейным оператором (12.2) превращается в левую часть уравнения (12.3).

Теорема *Если существует ортогональный оператор с матрицей* C*, приводящий действительную квадратичную форму* $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *к каноническому виду*

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2, \qquad (12.27)$$

то $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *- характеристические числа матрицы* A *квадратичной формы* f*, причем столбцами матрицы* C *являются собственные векторы-столбцы матрицы* A *с собственными числами* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Доказательство. Пусть ортогональный оператор $X = CY$, где $C = (c_{ij})$, приводит квадратичную форму f к каноническому виду (12.27), тогда матрица квадратичной формы φ имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix}. \qquad (12.28)$$

Поскольку $D = C^T AC$ и C - ортогональная матрица, то $C^T = C^{-1}$; следовательно, $D = C^{-1}AC$, откуда получаем, что λ_i - характеристические числа матрицы A.

Принимая во внимание выражения $D = C^T AC, CC^T = E$ и умножая обе части равенства (12.28) на C слева, получаем (так как $CD = CC^{-1}AC = AC$)

$$AC = C \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix}. \qquad (12.29)$$

Для элементов b_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы $B = AC$ согласно правилу умножения матриц имеем $b_{ij} = a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \ldots + a_{in}c_{nj}$. С другой стороны, из равенства (12.29) следует, что $b_{ij} = c_{ij}\lambda_j$, поэтому

$$a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \ldots + a_{in}c_{nj} = \lambda_j c_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

или

$$A\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}.$$

Итак, j-й столбец $(j = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы C является собственным вектором-столбцом матрицы A с собственным числом λ_j.

Теорема *Для любой действительной симметрической матрицы* A *существует такая ортогональная матрица* T, *что* $T^{-1}AT$ - *диагональная матрица.*

Теорема *Для любой действительной квадратичной формы существует ортогональный оператор, приводящий ее к каноническому виду.*

Следствие *Любая действительная симметрическая матрица может быть приведена к диагональному виду.*

Теорема *Если линейный оператор действительного линейного пространства имеет действительную симметрическую матрицу в некотором ортонормированном базисе, то существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.*

Из доказанных теорем получаем алгоритм нахождения ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму n переменных к каноническому виду:

1) записываем матрицу данной квадратичной формы, находим ее собственные значения и n попарно ортогональных собственных векторов, нормируем их;
2) составляем матрицу из ортонормированных собственных векторов-столбцов;
3) записываем искомый ортогональный оператор с помощью последней матрицы.

Рассмотрим два метода приведения квадратичных форм к каноническому виду

Как привести квадратичную форму к каноническому виду? Метод Лагранжа

Продолжаем. Если в квадратичной форме **отсутствуют** слагаемые с *парными произведениями* переменных, то говорят, что она находится в **каноническом виде**. ….

Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду:

– форму двух переменных $Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$ – к виду $Q(y_1, y_2) = \alpha_{11}y_1^2 + \alpha_{22}y_2^2$ *(различаем коэффициенты «а» и «альфа»!)*;

– трёх переменных $Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$ – к виду $Q(y_1, y_2, y_3) = \alpha_{11}y_1^2 + \alpha_{22}y_2^2 + \alpha_{33}y_3^2$;

…

– форму n *переменных* $Q(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) =$ …………… – к виду:

$Q(y_1, y_2, y_3, ..., y_n) = \alpha_{11}y_1^2 + \alpha_{22}y_2^2 + \alpha_{33}y_3^2 + ... + \alpha_{nn}y_n^2$

И ключевой момент этой технической стороны состоит в *линейных* заменах:

$x_1 = p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + ... + p_{1n}y_n$

$x_2 = p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + ... + p_{2n}y_n$

…

$x_n = p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + ... + p_{nn}y_n$ – ТАКИХ, которые как раз и приводят форму к каноническому виду.

Систему часто записывают в виде компактного **матричного уравнения** $x = P \cdot y$, где:

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ – столбцы старых и новых переменных, $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица **линейного преобразования**.

Существует несколько способов приведения формы к каноническому виду, и в рамках вебинара я расскажу о методе Лагранжа

Пример 1

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа. Записать матрицу соответствующего линейного преобразования.

$Q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$

Решение: здесь используются стандартные замены $\begin{matrix} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{matrix}$ с последующим применением **формулы** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$Q(y_1, y_2) = 2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2(y_1^2 - y_2^2) = 2y_1^2 - 2y_2^2$ – форма $Q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ в каноническом виде.

Запишем матрицу проведённого линейного преобразования: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ – она состоит из «игрековых» коэффициентов замен $\begin{matrix} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{matrix}$.

Ответ: $Q(y_1, y_2) = 2y_1^2 - 2y_2^2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Пример, конечно, прозрачный, но сразу зададимся вопросом – как выполнить проверку? Её можно выполнить матричным методом по формуле $P^T AP = B$, где P^T – **транспонированная** матрица линейного преобразования, A – исходная и B – новая **матрица квадратичной формы**.

В нашем случае $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – исходная **матрица формы** $Q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$, и, **перемножая три матрицы**:

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ -1\cdot 0 + 1\cdot 1 & -1\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 - 1\cdot 1 & 1\cdot(-1) - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = B$$

– получаем матрицу формы $Q(y_1, y_2) = 2y_1^2 - 2y_2^2$, что и требовалось проверить.

Но то был лишь частный случай:

Пример 2

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

$Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$

Записать матрицу соответствующего линейного преобразования.

Решение: когда в форме присутствуют квадраты переменных (а они есть почти всегда), то используется другой приём. Идея состоит в выделении *полных квадратов* по **формулам** $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ с дальнейшей заменой переменных.

Сначала выбираем какую-нибудь переменную, которая находится в квадрате, здесь можно выбрать x_1 или x_2. Переменные традиционно перебирают по порядку, поэтому рассматриваем x_1 и собираем вместе все слагаемые, где есть эта переменная:

$2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$

«двойку» удобно вынести за скобки:

$2(x_1^2 - 2x_1x_2) + x_2^2$

очевидно, всё дело сведётся к формуле $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, и нам нужно искусственно организовать данную конструкцию. Для этого в скобках прибавляем x_2^2 и, чтобы ничего не изменилось – за скобками проводим вычитание:

$2(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - 2 \cdot x_2^2 + x_2^2$

выделяем полный квадрат:

$2(x_1 - x_2)^2 - x_2^2$, после чего **выполним проверку** обратными действиями – раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$2(x_1 - x_2)^2 - x_2^2 = 2(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - x_2^2 = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2^2 = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$, OK

Теперь проведём замены $\begin{matrix} x_1 - x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{matrix}$:

$Q(y_1, y_2) = 2y_1^2 - y_2^2$ – форма $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ в каноническом виде.

И тут вроде бы можно записать матрицу линейного преобразования, но есть одна загвоздка, проведённые замены **имеют вид** $Rx = y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

но нам-то нужна другая матрица – матрица P уравнения $x = Py$.

Для разрешения уравнения $Rx = y$ относительно x умножим обе его части на R^{-1} слева:

$R^{-1}Rx = R^{-1}y$

$Ex = R^{-1}y$

$x = R^{-1}y$

Я не буду подробно расписывать процесс нахождения обратной матрицы, а сразу приведу готовый результат $R^{-1} = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – искомая матрица линейного преобразования. Напоминаю *(см. начало урока)*, что в этой матрице находятся «игрековые» коэффициенты «прямых» замен:

$x_1 = y_1 + y_2$

$x_2 = \quad y_2$

Справка: *возможно, ещё не все до конца понимают, как из* ***матричного уравнения*** *получается система замен. В правой части уравнения* $x = Py \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *выполняем матричное умножение:*

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 \\ 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 \end{pmatrix}$

Две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы, таким образом:

$x_1 = y_1 + y_2$

$x_2 = \quad y_2$

И в самом деле, выполняя прямые замены в форме $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$:

$2(y_1 + y_2)^2 + y_2^2 - 4(y_1 + y_2)y_2 = 2(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2) + y_2^2 - 4(y_1y_2 + y_2^2) =$

$= 2y_1^2 + 4y_1y_2 + 2y_2^2 + y_2^2 - 4y_1y_2 - 4y_2^2 = 2y_1^2 - y_2^2$ – получаем её канонический вид, найденный выше.

То же самое можно установить матричным методом. Запишем матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ формы $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ и в результате перемножения трёх матриц:

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$ –

получим «каноническую» матрицу.

Прямая подстановка, безусловно, удобнее, но особенность метода Лагранжа состоит в том, что к канонической форме мы подбираемся «с другой стороны» (за исключением немногочисленных случаев наподобие предыдущего примера).

Ответ: $Q(y_1, y_2) = 2y_1^2 - y_2^2$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Квадратичную форму можно привести к каноническому виду не единственным способом. Это следует уже из самого алгоритма действий. Так, например, полный квадрат можно выделить без выноса «двойки» за скобку:

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$$

$$(\sqrt{2}x_1)^2 - 2\cdot\sqrt{2}x_1\cdot\sqrt{2}x_2 + (\sqrt{2}x_2)^2 - 2x_2^2 + x_2^2$$

$$(\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2)^2 - x_2^2$$

контроль: $(\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2)^2 - x_2^2 = 2x_1^2 - 2\cdot\sqrt{2}x_1\cdot\sqrt{2}x_2 + 2x_2^2 - x_2^2 = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$

и, после замен $\begin{cases}\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2\end{cases}$ тоже получается канонический, но уже другой вид рассматриваемой формы:

$$Q(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$$

Кстати, начать можно и со 2-й переменной –

Пример для самостоятельного решения

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$$

выделив полный квадрат при переменной x_2.

Записать матрицу соответствующего линейного преобразования.

.**Решение:** *приведём форму*

$Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ *к каноническому виду*

$2x_1^2 + (x_2^2 - 2 \cdot 2x_1x_2 + 4x_1^2) - 4x_1^2$

$-2x_1^2 + (x_2 - 2x_1)^2$

Проведём замены

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= y_1 \\ -2x_1 + x_2 &= y_2 \end{aligned}$$:

$Q(y_1, y_2) = -2y_1^2 + y_2^2$ *– форма* $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ *в каноническом виде.*

Найдём матрицу линейного преобразования $P = R^{-1}$, *где* $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *– матрица «иксовых» коэффициентов проведённых замен.*

В данном случае $P = R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *(см.* ***Как найти обратную матрицу?****)*

Выполним проверку прямой подстановкой

$x_1 = y_1$

$x_2 = 2y_1 + y_2$ *в* $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$:

$2y_1^2 + (2y_1 + y_2)^2 - 4y_1(2y_1 + y_2) = 2y_1^2 + 4y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2 - 8y_1^2 - 4y_1y_2 = -2y_1^2 + y_2^2$, *что и требовалось проверить.*

Ответ: $Q(y_1, y_2) = -2y_1^2 + y_2^2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Пример 3

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа

$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Записать матрицу соответствующего линейного преобразования.

Решать начинаем традиционно – группируем все слагаемые, которые содержат 1-ю переменную:

$x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 9x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

и начинаем конструировать полный квадрат:

$x_1^2 + 2x_1(3x_2 + x_3) + 9x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

здесь чётко просматривается формула $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ и для её применения мы должны **прибавить и вычесть** $b^2 = (3x_2 + x_3)^2$:

$x_1^2 + 2x_1(3x_2 + x_3) + (3x_2 + x_3)^2 - (3x_2 + x_3)^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

«собираем» квадрат суммы и упрощаем «хвост», распишу это упрощение подробно:

$(x_1 + 3x_2 + x_3)^2 - (9x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2) + 9x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

$(x_1 + 3x_2 + x_3)^2 - 9x_2^2 - 6x_2x_3 - x_3^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

$(x_1 + 3x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3$

контроль: $(x_1 + 3x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3 = x_1^2 + 2x_1(3x_2 + x_3) + (3x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3 =$

$= x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 9x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2 - 4x_2x_3 = x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ – *ч.т.п.*

На следующем шаге обычно выделяется ещё один полный квадрат, но у нас осталось единственно слагаемое с парным произведением, и в подобной ситуации сразу же выполняются замены, в данном случае $x_1 + 3x_2 + x_3 = z_1, \quad x_2 = z_2, \quad x_3 = z_3$:

$z_1^2 - 4z_2z_3$

В результате получен *неканонический* вид формы и поэтому нам потребуется ещё одна замена. Используем стандартный трюк, который встретился в самом начале урока:

$z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2 - y_3, \quad z_3 = y_2 + y_3$. Таким образом, получаем:

$y_1^2 - 4(y_2 - y_3)(y_2 + y_3)$

$y_1^2 - 4(y_2^2 - y_3^2)$

$y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2$ – форма $x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ в каноническом виде.

Теперь нужно записать матрицу соответствующего линейного преобразования. Ситуация осложнятся тем, что мы провели ДВА преобразования, и нам предстоит найти их *композицию* – результирующее преобразование, которое выражает x_1, x_2, x_3 через сумму / разность «игреков».

Давайте разбираться, что к чему. Запишем первую замену

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= z_1 \\ x_2 \quad &= z_2 \\ x_3 &= z_3 \end{aligned}$$

в матричной форме:

$$Rx = z \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Вторая же замена

$$z_1 = y_1$$

$$z_2 = \quad y_2 - y_3$$

$$z_3 = \quad y_2 + y_3$$

имеет несколько другой вид:

$$z = Sy \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Из уравнений

$$Rx = z, \quad z = Sy$$

следует, что:

$$Rx = Sy$$

Для разрешения полученного уравнения относительно x умножим обе его части на R^{-1} слева:

$$R^{-1}Rx = R^{-1}Sy$$

$$x = R^{-1}Sy$$

Таким образом, нам нужно найти **обратную матрицу**

$$R^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ и выполнить матричное умножение:

$$R^{-1}S=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1-3\cdot0-1\cdot0 & 1\cdot0-3\cdot1-1\cdot1 & 1\cdot0-3\cdot(-1)-1\cdot1\\ 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot(-1)+0\cdot1\\ 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot1+1\cdot1 & 0\cdot0+0\cdot(-1)+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=P$$ – получив тем самым искомое результирующее преобразование.

Но подставлять

$$x_1=y_1-4y_2+2y_3$$
$$x_2=\quad y_2-y_3$$
$$x_3=\quad y_2+y_3$$

в форму $x_1^2+9x_2^2+x_3^2+6x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ долго и с помощью формулы,

матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 3 & 9 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,:

$$P^TAP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 3 & 9 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=B$$ – получена матрица приведённой формы $y_1^2-4y_2^2+4y_3^2$, в чём мы и хотели убедиться.

Ответ: $y_1^2-4y_2^2+4y_3^2$, $P=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Пример для самостоятельного решения

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

$$x_1x_2 + 2x_2x_3$$

Пример 4

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа

$x_1x_2 + 2x_2x_3$

Решение:

а) проведём замены $x_1 = z_1 - z_2$, $x_2 = z_1 + z_2$, $x_3 = z_3$:

$(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) + 2(z_1 + z_2)z_3$

$z_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_3 + 2z_2z_3$

Полученная форма имеет неканонический вид, и здесь следует выделить полные квадраты. Начнём с переменной z_1:

$z_1^2 + 2z_1z_3 - z_2^2 + 2z_2z_3$

$(z_1^2 + 2z_1z_3 + z_3^2) - z_3^2 - z_2^2 + 2z_2z_3$

$(z_1 + z_3)^2 - z_2^2 + 2z_2z_3 - z_3^2$

теперь выделяем квадрат при переменной z_2:

$(z_1 + z_3)^2 - (z_2^2 - 2z_2z_3) - z_3^2$

$(z_1 + z_3)^2 - (z_2^2 - 2z_2z_3 + z_3^2) + z_3^2 - z_3^2$

$(z_1 + z_3)^2 - (z_2 - z_3)^2 + 0 \cdot z_3^2$

Контроль: $(z_1 + z_3)^2 - (z_2 - z_3)^2 = z_1^2 + 2z_1z_3 + z_3^2 - (z_2^2 - 2z_2z_3 + z_3^2) =$

$= z_1^2 + 2z_1z_3 + z_3^2 - z_2^2 + 2z_2z_3 - z_3^2 = z_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_3 + 2z_2z_3$, *что и требовалось проверить.*

Проведём замены: $z_1 + z_3 = y_1$, $z_2 - z_3 = y_2$, $z_3 = y_3$

Ответ: $y_1^2 - y_2^2$

Примечание: *проведённые замены можно записать в виде матричных уравнений* $x = Mz$, $Nz = y$. *Из последнего уравнения выразим* $z = N^{-1}y$ *и подставим в первое уравнение:* $x = MN^{-1}y$. *Таким образом, для нахождения матрицы итогового линейного преобразования нужно найти* N^{-1} *и выполнить умножение* $MN^{-1} = P$.

Пример для самостоятельного решения

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

$$x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$$

Пример 5

$x_1^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3$ – особенно часто встречающийся тип приведения.

Решение: *выделим полный квадрат при 1-й переменной:*

$x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2-6x_2x_3$

$x_1^2-2x_1(x_2-2x_3)+x_3^2-6x_2x_3$

$x_1^2-2x_1(x_2-2x_3)+(x_2-2x_3)^2-(x_2-2x_3)^2+x_3^2-6x_2x_3$

«собираем» полный квадрат и упрощаем «хвост»:

$(x_1-(x_2-2x_3))^2-(x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2)+x_3^2-6x_2x_3$

$(x_1-x_2+2x_3)^2-x_2^2+4x_2x_3-4x_3^2+x_3^2-6x_2x_3$

$(x_1-x_2+2x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-3x_3^2$

выделим полный квадрат при 2-й переменной:

$(x_1-x_2+2x_3)^2-(x_2^2+2x_2x_3)-3x_3^2$

$(x_1-x_2+2x_3)^2-(x_2^2+2x_2x_3+x_3^2)+x_3^2-3x_3^2$

$(x_1-x_2+2x_3)^2-(x_2+x_3)^2-2x_3^2$

Выполним проверку раскрыв все скобки:

$(x_1-x_2+2x_3)^2-(x_2+x_3)^2-2x_3^2=(x_1-x_2)^2+2(x_1-x_2)\cdot 2x_3+4x_3^2-(x_2^2+2x_2x_3+x_3^2)-2x_3^2=$

$=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+4x_1x_3-4x_2x_3+4x_3^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2-2x_3^2=$ $=x_1^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3$ *– получен исходный вид формы.*

Проведём замены: $x_1-x_2+2x_3=y_1, \quad x_2+x_3=y_2, \quad x_3=y_3$

Ответ: $y_1^2-y_2^2-2y_3^2$

Примечание: *выполненные замены имеют вид* $Rx=y$*, таким образом, матрица линейного преобразования:* $P=R^{-1}$

В образцах решения использован «традиционный» путь, т.е. полные квадраты выделяются по порядку, начиная с 1-й переменной. Перед заменой переменных полезно выполнять обратный ход – раскрывать скобки и приводить подобные слагаемые, чтобы получить исходный вид. Это вполне надёжный способ проверки. Также обратите внимание, что здесь не требуется указывать линейное преобразование.

Тогда продолжаем – начинается самое интересное! Наверное, все понимают, что подавляющее большинство линейных преобразований не приводят нас к желаемому результату. Вернёмся форме

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$$

и проведём, например, такую замену:

$$x_1 = z_1 - z_2$$
$$x_2 = 2z_1 + z_2.$$

Запишем матрицу формы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

матрицу преобразования

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и воспользуемся знакомой формулой:

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot(-2) & 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 \\ -1\cdot 2 + 1\cdot(-2) & -1\cdot(-2) + 1\cdot 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 + 0\cdot 2 & -2\cdot(-1) + 0\cdot 1 \\ -4\cdot 1 + 3\cdot 2 & -4\cdot(-1) + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = B$$

Таким образом, форма $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ приняла другой, тоже *неканонический* вид $Q(z_1, z_2) = -2z_1^2 + 7z_2^2 + 4z_1z_2$.

И тут я хочу отметить ещё одно преимущество матричного решения. В результате умножения $P^T AP$ ДОЛЖНА получиться **симметрическая** и только такая матрица, и этот факт значительно снижает риск пропустить ошибку. Но, разумеется, можно выполнить и прямую подстановку $\begin{matrix} x_1 = z_1 - z_2 \\ x_2 = 2z_1 + z_2 \end{matrix}$ в $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$:

$$2(z_1 - z_2)^2 + (2z_1 + z_2)^2 - 4(z_1 - z_2)(2z_1 + z_2) =$$
$$= 2(z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2) + (4z_1^2 - 4z_1z_2 + z_2^2) - 4(2z_1^2 - z_1z_2 - z_2^2) =$$
$$= 2z_1^2 - 4z_1z_2 + 2z_2^2 + 4z_1^2 - 4z_1z_2 + z_2^2 - 8z_1^2 + 4z_1z_2 + 4z_2^2 =$$
$$= -2z_1^2 + 7z_2^2 - 4z_1z_2$$

Правда, запутаться тут легче и гарантий никаких.

Далее. Все преобразования, которые нам встретились выше, *не вырождены*. Что это означает? Это означает, что для них существует обратное преобразование – образно говоря, «путь назад». То есть **определитель матрицы** *невырожденного* линейного преобразования непременно отличен от нуля $|P| \neq 0$, что гарантирует существование **обратной матрицы** $P^{-1} = R$ и «зеркальной» формулы $R^T BR = A$, с помощью которой мы можем однозначно восстановить исходную матрицу A.

Чего не скажешь о преобразовании *вырожденном* –Одним из таких преобразований является тривиальное *нулевое* преобразование. Так, например, если $\begin{matrix} x_1 = 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 \\ x_2 = 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 \end{matrix}$, то форма $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ *вырождается* в нулевую форму $Q(y_1, y_2) = 0 \cdot y_1^2 + 0 \cdot y_2^2$ с матрицей

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

. Обратного пути нет, то есть, если нам **изначально** дана вырожденная «игрековая» форма с матрицей B, то невозможно выяснить, от какой формы она произошла.

Существуют и другие типы «вырождения», но всех их объединяет тот факт, что **определитель** матрицы такого преобразования равен нулю: $|P| = 0$, из чего следует, что **обратной матрицы** не существует, а значит, не существует и возврата.

А теперь заметим, что нулевое преобразование привело нас… к каноническому виду $Q(y_1, y_2) = 0 \cdot y_1^2 + 0 \cdot y_2^2$! И в самом деле – это же канонический вид по определению. И поэтому сейчас мы усилим утверждение.:

любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду с помощью невырожденного линейного преобразования. Существование такого преобразования, в частности, гарантирует метод Лагранжа.

Кульминационный и ОЧЕНЬ важный момент: невырожденное линейное преобразование не меняет СУЩНОСТИ квадратичной формы. Здесь можно привести такой ассоциативный пример: рассмотрим произвольную ненулевую форму

$Q(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и представим, что это квадратный лист бумаги, на котором записано некое слово. Если форма находится в *неканоническом* виде, то лист занимает такое положение, в котором мы слова не видим, или же только догадываемся, что это за слово.

1) Невырожденное преобразование, которое приводит форму к каноническому виду, поворачивает листок бумаги к нам «лицом» – чтобы слово было отчётливо видно. Поскольку таких преобразований на самом деле много, то лист бумаги *в общем случае* будет менять свой размер и местоположение, и размер шрифта тоже будет меняться. Но что не изменится – так это слово.

2) Невырожденное преобразование, которое НЕ приводит форму к каноническому виду, делает то же самое с большим и толстым нюансом: слова мы по-прежнему не видим.

3) Вырожденное линейное преобразование либо полностью стирает с листа слово (нулевое преобразование), либо стирает отдельные буквы – так, чтобы нельзя было однозначно сказать, от какого слова они остались; причём, мы можем не увидеть даже и этих букв *(если форма осталась в неканоническом виде)*.

И, завершая ассоциацию, отметим **наиболее интересный случай** – когда *невырожденное* преобразование не только приводит форму к каноническому виду, но ещё и сохраняет размер листа, т.е. поворачивает его к нам в неизменном виде.

Задача 6.10. Привести к каноническому виду методом Лагранжа квадратичную форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 - \frac{3}{4}x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2,$$

записав соответствующие преобразования переменных.

◄ Собираем вместе члены, содержащие x_1, и выносим коэффициент при x_1^2 за скобку. Затем выделяем полный квадрат:

$$4x_1^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 = 4\left(x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - 2x_1x_3\right) =$$

$$= 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2.$$

После такого преобразования данная квадратичная форма принимает вид

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3\right)^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - 3x_3^2.$$

Теперь выделяем члены с x_2 и дополняем их до полного квадрата, вынося за скобку коэффициент при x_2^2:

$$F(x_1,x_2,x_3)=4\left(x_1+\frac{1}{4}x_2-x_3\right)^2-(x_2+x_3)^2-2x_3^2.$$

Обозначая

$$y_1=x_1+\frac{1}{4}x_2-x_3,\quad y_2=x_2+x_3,\quad y_3=x_3,$$

получаем в новых координатах канонический вид квадратичной формы:

$$F(y_1,y_2,y_3)=4y_1^2-y_2^2-2y_3^2.$$

Таким образом, ранг квадратичной формы $r=3$, количество положительных коэффициентов $p=1$, количество отрицательных коэффициентов $q=2$, сигнатура $s=p-q=-1$.

Выполненное преобразование координат можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\text{ т. е. }\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -5/4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица перехода

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -5/4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1/4 & 1 & 0\\ -5/4 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4\\ 1 & -3/4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -5/4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\mathbf{\Lambda}.$$

Диагональная матрица Λ и определяет канонический вид данной квадратичной формы. ►

Спасибо за внимание!