Линейная алгебра и аналитическая геометрия
Лекция 7
Тема: Линейные операторы

Литература:

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – СПб: Издательство «Лань», 2008, 256с.
2. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов: Практикум.– М.: Юнити-Дана, 2007, 479с.
3. Ефимов А.В., Поспелов А.С. и др. Сборник задач по математике. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 – М.: Оникс, 2006.

Ядро и область значений линейного оператора

Ядром оператора $f:V\to W$ называется множество тех векторов пространства V, каждый из которых данный оператор переводит в нулевой вектор.

Ядро оператора f будем обозначать $\ker f$. Таким образом,

$ker f=\{x\in V \mid f(x)=\theta\}$, ($\theta$ - нулевой вектор).

Областью значений или ***образом оператора*** $f:V\to W$ называется множество векторов пространства W, каждый из которых является образом хотя бы одного вектора из V. Образ оператора f будем обозначать $\operatorname{Im} f$.

Таким образом,

$Im f=\{y\in W \mid y=f(x)\}$.

Справедливы следующие утверждения.

1 *Ядро линейного оператора* $f:V\to V$ *является подпространством пространства* V.

Доказательство. Так как f - линейный оператор, то $f(\theta)=\theta$. Следовательно, $\ker f\neq\varnothing$.

Пусть $x_1,\ x_2\in ker f$, т.е. $f(x_1)=f(x_2)=\theta$. Тогда

$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)=\theta$, $\qquad f(\lambda x_1)=\lambda f(x_1)=\theta$.

Поэтому $x_1+x_2\in ker f$, $\lambda x_1\in ker f$. Следовательно, $\ker f$ есть подпространство пространства V.

2 *Область значений линейного оператора* $f:V\to V$ *является подпространством пространства* V.

3 *Ядро оператора* $f:V\to V$ *состоит только из нулевого вектора тогда и только тогда, когда из условия* $x_1\neq x_2$ *следует, что* $f(x_1)\neq f(x_2)$.

В справедливости утверждений **2**, **3** предлагаем читателю убедиться самостоятельно.

Рангом оператора f называется $\dim\operatorname{Im} f$, т.е. размерность образа оператора.

Дефектом оператора f называется $\dim\ker f$, т.е. размерность ядра оператора.

Теорема 11.4 *Если* $f: V \to V$ *- линейный оператор, то:*

1) $\dim \operatorname{Im} f = r_A$; 2) $\dim \ker f = n - r_A$,

где r_A *- ранг матрицы* A *оператора* f, $n = \dim V$ - размерность пространства V.

Доказательство. 1) Пусть $y \in \operatorname{Im} f$, тогда существует $x \in V$, такой, что $f(x) = y$, или

$$AX = Y, \tag{11.13}$$

где X, Y - столбцы из координат векторов соответственно $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ в базисе, в котором задана матрица A оператора f.

Так как система (11.13) совместна, то $r_A = r_A = r$. Следовательно, столбец Y является линейной комбинацией базисных столбцов матрицы A. Таким образом, любой вектор $y \in Imf$ является линейной комбинацией r линейно независимых векторов. Следовательно, $\dim \operatorname{Im} f = r = r_A$.

2) Пусть $x \in ker\, f$, тогда $f(x) = \theta$, или $AX = O$. Следовательно, пространство $\ker f$ является пространством решений системы $AX = O$, размерность которого равна $n - r_A$.

Из доказанной теоремы следует, что

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim V \quad (f: V \to V).$$

Задача для самостоятельного решения (повторение пройденного)

Задача 4.3. Пусть в некотором базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3$ задан произвольный вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Определить, какие из следующих операторов $\boldsymbol{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ являются линейными:

а) $\boldsymbol{Ax} = (3x_1 + x_2, x_1 - 2x_2 - x_3, 3x_2 + 2x_3)$;

б) $\boldsymbol{Ax} = (x_1^2, x_2 + x_3, x_3^2)$.

Для линейных операторов найти матрицы в базисе, в котором заданы векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{Ax}$.

Задача 4.3. Пусть в некотором базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3$ задан произвольный вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$. Определить, какие из следующих операторов $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ являются линейными:

а) $Ax = (3x_1 + x_2, x_1 - 2x_2 - x_3, 3x_2 + 2x_3)$;

б) $Ax = (x_1^2, x_2 + x_3, x_3^2)$.

Для линейных операторов найти матрицы в базисе, в котором заданы векторы x и Ax.

◄ а) Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ — произвольные векторы пространства $\mathbb{R}^3$. Тогда $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ и $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$.

Проверим условия линейности оператора:

$$A(x+y) = \big(3(x_1+y_1) + x_2 + y_2,\ x_1 + y_1 - 2(x_2+y_2) - x_3 - y_3,\ 3(x_2+y_2) + 2(x_3+y_3)\big) = Ax + Ay;$$

$$A(\lambda x) = (3\lambda x_1 + \lambda x_2,\ \lambda x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda x_3,\ 3\lambda x_2 + 2\lambda x_3) = \lambda Ax.$$

Условия линейности выполняются. Следовательно, оператор $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линейный.

Найдем матрицу этого линейного оператора. Если матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 3x_1 + x_2, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = x_1 - 2x_2 - x_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 3x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &a_{11} = 3, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = 0, \\ &a_{21} = 1, \quad a_{22} = -2, \quad a_{23} = -1, \\ &a_{31} = 0, \quad a_{32} = 3, \quad a_{33} = 2, \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

б) Проверим первое условие линейности оператора. Имеем

$$A(x+y) = \big((x_1+y_1)^2,\ x_2 + y_2 + x_3 + y_3,\ (x_3+y_3)^2\big) \ne$$
$$\ne (x_1^2,\ x_2 + x_3,\ x_3^2) + (y_1^2,\ y_2 + y_3,\ y_3^2) = Ax + Ay.$$

Это условие не выполняется. Следовательно, не проверяя второе условие, можно сделать вывод, что оператор A не является линейным. ►

Задача 4.4. Доказать линейность, найти матрицу в базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, образ, ранг, ядро и дефект *оператора проецирования* пространства геометрических векторов V_3 на плоскость XOY.

◄ Докажем линейность оператора проецирования. Пусть в базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ имеем произвольный вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Тогда его образ (*проекция*) есть $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, 0)$.

По правилам операций с геометрическими векторами в координатной форме для любых $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ из пространства V_3 и произвольного действительного числа λ имеем

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{y};$$

$$\boldsymbol{P}(\lambda \boldsymbol{x}) = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0) = \lambda (x_1, x_2, 0) = \lambda \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}.$$

Согласно определению матрицы оператора, ее столбцы — это столбцы координат образов базисных векторов. Найдем образы базисных векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и запишем их координаты в базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$:

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{P}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{P}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} = (0, 0, 0).$$

Тогда матрица оператора проецирования

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем образ, ранг, ядро и дефект оператора $\boldsymbol{P}$ исходя из определений.

Образ $\operatorname{im} \boldsymbol{P}$ оператора проецирования $\boldsymbol{P}$ — это множество векторов, *лежащих в плоскости* XOY. Следовательно, в базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$

$$\operatorname{im} \boldsymbol{P} = (\forall \boldsymbol{y} \colon \boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{i} + \beta \boldsymbol{j}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Отсюда $\operatorname{Rg} \boldsymbol{P} = 2$.

Ядро $\ker \boldsymbol{P}$ — это множество векторов, *коллинеарных оси* OZ. Следовательно, в базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$

$$\ker \boldsymbol{P} = (\forall \boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} = \gamma \boldsymbol{k}, \ \gamma \in \mathbb{R}).$$

Отсюда $\operatorname{def} \boldsymbol{P} = 1$.

Надо отметить, что имеет место равенство

$$\operatorname{Rg} \boldsymbol{P} + \operatorname{def} \boldsymbol{P} = 2 + 1 = 3 = \dim V_3. \ ►$$

Характеристический многочлен, характеристическое уравнение линейного оператора

Теорема 11.5 *Если линейный оператор f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ имеет матрицу A и в базисе $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ матрицу B, то $\det(A-\lambda E)=\det(B-\lambda E)$, где λ - любое действительное число; E - единичная матрица n-го порядка.*

Доказательство. Обозначим через T матрицу перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e_1', e_2', \ldots, e_n'$, тогда $B=T^{-1}AT$. Следовательно,

$$\det(B-\lambda E)=\det\left(T^{-1}AT-\lambda E\right)=\det\left(T^{-1}AT-\lambda T^{-1}ET\right)=$$
$$=\det\left(T^{-1}(A-\lambda E)T\right)=\det T^{-1}\cdot\det(A-\lambda E)\cdot\det T=\det(A-\lambda E),$$

так как $\det T^{-1}\cdot\det T=1$. Итак, доказано, что

$$\det(A-\lambda E)=\det(B-\lambda E). \qquad (11.14)$$

Отметим, что $\det(A-\lambda E)$ является многочленом степени n относительно λ. Многочлен $\det(A-\lambda E)$ называется ***характеристическим многочленом* матрицы** A, или ***характеристическим многочленом линейного оператора*** f.

Равенство (11.14) означает, что характеристический многочлен линейного оператора остается неизменным при переходе к новому базису при том, что матрица линейного оператора меняется.

Характеристическим уравнением линейного оператора называется уравнение

$$\det(A-\lambda E)=0, \qquad (11.15)$$

где A - матрица этого оператора в некотором базисе. Очевидно, характеристическое уравнение не зависит от выбора базиса. Уравнение (11.15)

называют также характеристическим уравнением матрицы A. Корни уравнения (11.15) называются ***характеристическими числами*** линейного оператора f, или характеристическими числами матрицы A.

Например, найдем характеристический многочлен и характеристические числа матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен данной матрицы имеет вид

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ -2 & -\lambda & -3 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(5-\lambda)+12+12-(6\lambda+4(5-\lambda)+6\lambda)=$$

$$=5\lambda^2-\lambda^3+24-6\lambda-20+4\lambda-6\lambda=-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4.$$

Для нахождения характеристических чисел решим уравнение

$$-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0.$$

Его можно записать в виде

$$(\lambda^3-\lambda^2)-(4\lambda^2-4\lambda)+(4\lambda-4)=0$$

или

$$(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+4)=0.$$

Корни этого уравнения, т.е. характеристические числа: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$.

Система всех характеристических чисел линейного оператора называется его ***спектром***. Каждое характеристическое число входит в спектр столько раз, какова его кратность. Спектр оператора называется ***простым***, если характеристический многочлен имеет только простые корни.

Итак, пусть характеристический многочлен матрицы A порядка n имеет вид

$$p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n, \tag{11.16}$$

где $p_0 = (-1)^n$, $p_1 = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$, …, $p_n = |A|$.

В соответствии с формулами Вьета коэффициенты характеристического многочлен связаны с характеристическими корнями следующим образом:

$$p_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n,$$

$$p_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n,$$

....

$$p_n = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$$

из этих формул, в частности, вытекают часто применяемые соотношения

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn},$$

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = |A|.$$

Согласно последнему равенству характеристический многочлен матрицы имеет нулевые характеристические корни тогда и только тогда, когда определитель этой матрицы равен нулю, т.е. матрица вырожденная.

Например, определим имеет ли матрица A нулевые характеристические корни

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 1 & 2 & 0 \\ 11 & 12 & 7 & 2 & 4 & 0 \\ 8 & 3 & 6 & 5 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A - клеточная. Найдем ее определитель. Согласно теоремы Лапласа, имеем

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\cdot 3=0,$$

(второй сомножитель равен нулю, как определитель с пропорциональными строками). Следовательно, матрица A имеет нулевой характеристический корень.

Повторим, известные уже нам факты, если в произвольный многочлен

$$P(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

вместо переменной λ подставить квадратную матрицу A порядка n, то в результате получим матрицу $P(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_nE$, которую называют значением многочлена $P(\lambda)$ при $\lambda=A$. Если для данной матрицы A верно равенство $P(A)=0$ (значением многочлена $P(\lambda)$ при $\lambda=A$ является нулевая матрица), то A называют ***матричным корнем многочлена*** $P(\lambda)$. Сам многочлен $P(\lambda)$ назовем при этом ***многочленом, аннулируемым матрицей*** A.

Теорема 11.6 *Всякая квадратная матрица является корнем некоторого ненулевого многочлена.*

Доказательство. Множество всех квадратных матриц порядка n с элементами из поля P есть линейное пространство над P размерности n^2. В этом линейном пространстве любая система, в которой не менее n^2+1 элементов, является линейно зависимой. Следовательно, система A^{n^2}, A^{n^2-1}, …, A, E из n^2+1 матриц линейно зависима, т.е. существует такой набор чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2}$, одновременно не обращающихся в нуль, что выполняется равенство

$$\alpha_0 A^{n^2} + \alpha_1 A^{n^2-1} + \ldots + \alpha_{n^2-1} A + \alpha_{n^2} = 0.$$

Это равенство означает, что матрица A является корнем многочлена

$$P(\lambda) = \alpha_0 \lambda^{n^2} + \alpha_1 \lambda^{n^2-1} + \ldots + \alpha_{n^2-1} \lambda + \alpha_{n^2}.$$

Примем без доказательства теорему Гамильтона-Кели.

Теорема 11.7 (***Гамильтона-Кели***) *Любая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена.*

Минимальный многочлен матрицы

Многочлен $\varphi(\lambda)$ минимальной степени, имеющий старший коэффициент, равный единице, и аннулируемый матрицей A, называют ***минимальным многочленом*** этой матрицы.

Теорема 11.8 *Любой многочлен, аннулируемый матрицей A, нацело делится на минимальный многочлен этой матрицы. В частности, характеристический многочлен матрицы делится на ее минимальный многочлен.*

Доказательство. Разделим многочлен $P(\lambda)$ на минимальный многочлен $\varphi(\lambda)$ с остатком: $P(\lambda)=\varphi(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$, где многочлен $r(\lambda)$ имеет степень меньше степени $\varphi(\lambda)$. Заменив переменную λ матрицей A, получим:

$$P(A)=\varphi(A)q(A)+r(A).$$

Так как $P(A)=\varphi(A)=0$, то и $r(A)=0$. Но это равенство возможно только в том случае, когда многочлен $r(\lambda)$ нулевой. Иначе возникает противоречие с определением минимального многочлена. Равенство $r(\lambda)=0$ означает, что многочлен $P(\lambda)$ нацело делится на $\varphi(\lambda)$.

Следствие *Любой корень минимального многочлена матрицы является корнем ее характеристического многочлена.*

Отметим еще несколько полезных фактов.

Характеристический многочлен $|A-\lambda E|$ матрицы A и ее минимальный многочлен $\varphi(\lambda)$ связаны соотношением

$$\varphi(\lambda)=\frac{(-1)^n|A-\lambda E|}{D_{n-1}}, \qquad (11.17)$$

где D_{n-1} - наибольший общий делитель всех миноров матрицы $A-\lambda E$, имеющих $(n-1)$-й порядок.

Корнями минимального многочлена $\varphi(\lambda)$ являются все различные корни характеристического многочлена $|A-\lambda E|$, причем если

$$|A-\lambda E|=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s},$$

то

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}, \qquad (11.18)$$

где $1\le n_k\le m_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ s$.

Формула (11.17) позволяет находить минимальный многочлен матрицы.

Например, найдем минимальный многочлен матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для матрицы A характеристический многочлен имеет вид $|A-\lambda E|=-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-2$. Общий наибольший делитель D_2 всех миноров второго порядка матрицы

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

равен единице, так как ее миноры

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=2(\lambda+1), \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=2(2-\lambda)$$

взаимно простые. Поэтому

$$\varphi(\lambda)=\frac{(-1)^3|\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}|}{\mathrm{D}_2}=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+2$$

- минимальный многочлен матрицы.

Рассмотренный пример показывает, что разные матрицы могут иметь одинаковые характеристические, но разные минимальные многочлены.

Учитывая, что матрицы данного линейного оператора в разных базисах подобны и имеют один и тот же характеристический многочлен, логично этот многочлен назвать ***характеристическим многочленом линейного оператора***, а его корни – ***характеристическими корнями линейного оператора***.

Отметим также, что транспонированная матрица A^T имеет одинаковые с матрицей A характеристические многочлены и характеристические числа.

Собственные векторы линейного оператора

Ненулевой вектор x линейного пространства называется ***собственным вектором*** линейного оператора f этого пространства, если существует число k такое, что

$$f(x) = kx, \tag{11.19}$$

причем k - действительное число для действительного линейного пространства и k - комплексное число в случае комплексного пространства. Число k называется ***собственным значением*** вектора x относительно оператора f. Равенство (11.16) можно записать в матричном виде

$$AX = kX, \tag{11.20}$$

где A - матрица оператора f в некотором базисе; X - матрица-столбец из координат собственного вектора x в том же базисе.

Ненулевая матрица-столбец X, удовлетворяющая уравнению (11.20), называется собственным вектором-столбцом матрицы A с собственным значением k.

Рассмотрим произвольную *квадратную* матрицу, например, $A=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}$. И умножим данную матрицу справа на какой-нибудь подходящий столбец. Наприме на вектор

$\bar{b}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$:

$$A\bar{b}=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot(-1)-6\cdot 1\\ 2\cdot(-1)+6\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 4\end{pmatrix}=\bar{c}$$

Вроде ничего примечательного – **умножили матрицу** $A=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}$ на *вектор-столбец* $\bar{b}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ и получили другой *вектор-столбец* $\bar{c}=\begin{pmatrix}-5\\ 4\end{pmatrix}$.

Обычная векторная жизнь. Но в обществе таких векторов существуют особые представители, которые обладают внутренним стержнем и не желают изменять себе в трудные минуты.

Умножим ту же матрицу на

$\bar{u}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$:

$$A\bar{u}=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 2-6\cdot(-1)\\ 2\cdot 2+6\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

На последнем шаге **вынесли константу**. Что произошло? В результате умножения матрицы A на вектор $\bar{u}$, данный вектор возродился с числовым коэффициентом $\lambda=2$:

$A\bar{u}=\lambda\bar{u}$

Определение: ненулевой вектор $\bar{u}$, который при умножении на некоторую квадратную матрицу A превращается в самого же себя с числовым коэффициентом λ , называется **собственным вектором** матрицы A. Число λ называют **собственным значением** или **собственным числом** данной матрицы.

Сколько у матрицы собственных чисел и собственных векторов?

У квадратной матрицы размером $n \times n$ существует **ровно** n **собственных значений**, причём некоторые из них (или даже все) могут быть *кратными* (совпавшими).

Так, у демонстрационной квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ровно два собственных значения, причём одно из них нам уже известно: $\lambda_1 = 2$. Второе собственное число λ_2 гипотетически тоже может равняться «двойке» *(но чаще всего, и здесь – в частности, собственные значения различны)*.

Могут ли собственные числа быть **комплексными**? Да, некоторые или все собственные значения могут быть комплексными. При этом алгоритм решения типовой задачи будет точно таким же. Что касается количества собственных векторов, то с ними ситуация занятнее.

Любой вектор, который *коллинеарен* вектору $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ тоже будет собственным вектором. Действительно, если взять пропорциональные столбцы, скажем, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, то совсем несложно убедиться в равенствах:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

И с этой точки зрения у матрицы A бесконечно много собственных векторов. Но под рассматриваемым вопросом всегда подразумевают **количество линейно независимых** (неколлинеарных) собственных векторов.

Каждому собственному значению соответствует **хотя бы один** собственный вектор, и если **все** собственные числа матрицы $n \times n$ **различны**, то она имеет ровно n собственных векторов.

Ненулевая матрица-столбец X, удовлетворяющая уравнению (11.20), называется собственным вектором-столбцом матрицы A с собственным значением k.

Собственные векторы и собственные значения обладают следующими **свойствами**:

1. *Собственный вектор линейного оператора имеет единственное значение* k.

Доказательство. Пусть k и m - собственные значения собственного вектора x относительно линейного оператора f, тогда $f(x)=kx$, $f(x)=mx$, откуда $kx=mx$, $(k-m)x=0$. Поскольку $x \neq 0$, то $k-m=0$, или $k=m$.

2. *Если* x *- собственный вектор линейного оператора* f *с собственным значением* k *и* λ *- любое отличное от нуля число, то* λx *- также собственный вектор оператора* f *с собственным значением* k.

Доказательство. Если x - собственный вектор с собственным значением k, то $f(\lambda x)=\lambda f(x)=\lambda(kx)=k(\lambda x)$. Это равенство означает, что λx - собственный вектор линейного оператора f с собственным значением k.

3. *Если* x *и* y *- линейно независимые собственные векторы линейного оператора* f *с одним и тем же собственным значением* k*, то* $x+y$ *- также собственный вектор этого оператора с собственным значением* k.

Доказательство. Если векторы x и y линейно независимы, то $x+y$ - ненулевой вектор и $f(x+y)=f(x)+f(y)=kx+ky=k(x+y)$, то есть $f(x+y)=k(x+y)$, а значит вектор $(x+y)$ - собственный вектор с собственным значением k.

4. *Если* x *и* y *- собственные векторы линейного оператора* f *с собственными значениями* k *и* m*, причем* $k \neq m$*, то* x *и* y *- линейно независимы.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. векторы x и y линейно зависимы, тогда $y=\lambda x$, причем $\lambda \neq 0$, так как $y \neq 0$. Согласно свойству 2 вектор λx является собственным вектором с собственным значением k. Учитывая свойство 1, из равенства $y=\lambda x$ заключаем, что $k=m$, а это противоречит условию. Следовательно, векторы x и y - линейно независимы. Отметим, что свойство 4 справедливо и для n $(n>2)$ векторов, т.е. *собственные векторы линейного оператора с попарно различными собственными значениями линейно независимы*.

Следствие. *Если* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *- линейно независимые собственные векторы линейного оператора* f *с одним и тем же собственным значением* k*, то любая нетривиальная комбинация этих векторов есть собственный вектор этого оператора с собственным значением* k.

Это утверждение следует из свойств 2 и 3.

Например, найдем характеристические числа и собственные векторы линейного оператора, определяемого уравнениями $x' = 5x + 4y$, $y' = 8x + 9y$.

Решение. Матрица оператора запишется так:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0;$$

характеристические числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 13$.

Для определения координат собственных векторов получаем две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)x + 4y = 0, \\ 8x + (9-\lambda_1)y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (5-\lambda_2)x + 4y = 0, \\ 8x + (9-\lambda_2)y = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = 1$, первую систему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0, \\ 8x + 8y = 0. \end{cases}$$

То есть, значения x и y должны удовлетворять уравнению $x + y = 0$, или $y = -x$. Следовательно, решение этой системы имеет вид $x = c_1$, $y = -c_1$, где c_1 - произвольная величина. Поэтому характеристическому числу $\lambda = 1$ соответствует семейство собственных векторов

$$u = c_1 e_1 - c_1 e_2, \qquad \text{т.е.} \qquad u = c_1(e_1 - e_2).$$

Далее, значение $\lambda_2 = 13$ приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} -8x + 4y = 0, \\ 8x - 4y = 0, \end{cases}$$

т.е. $y = 2x$. Полагая $x = c_2$, получаем $y = 2c_2$. Следовательно, характеристическому числу $\lambda = 13$ соответствует семейство собственных векторов

$$v = c_2(e_1 + 2e_2).$$

Итак, придавая в равенствах $u = c_1(e_1 - e_2)$, $v = c_2(e_1 + 2e_2)$ величинам c_1 и c_2 всевозможные числовые значения, будем получать всевозможные собственные векторы линейного оператора, определяемого заданными в условии задачи уравнениями.

Как найти собственные значения и собственные векторы матрицы?

Пример 1

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Перед вами старая знакомая матрица, у которой одно собственное значение и один собственный вектор. Обозначим через $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ неизвестный собственный вектор. Тогда **матричное уравнение** $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$ запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x-6y \\ 2x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

Две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы. Приравниваем соответствующие элементы *векторов-столбцов* и получаем **однородную систему линейных уравнений**:

$$\begin{cases} -x-6y = \lambda x \\ 2x+6y = \lambda y \end{cases}$$

Перенесём всё налево:

$$\begin{cases} -x-6y-\lambda x = 0 \\ 2x+6y-\lambda y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1-\lambda)x-6y = 0 \\ 2x+(6-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

По определению, собственный вектор не может быть нулевым $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, поэтому нас не устраивает тривиальное решение $x=0, y=0$ системы. Следовательно, **уравнения линейно зависимы** и **определитель матрицы системы равен нулю**:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Это так называемое **характеристическое уравнение** матрицы A, **корни которого являются собственными числами** данной матрицы.

Решение: на практике, как правило, не нужно расписывать подробный вывод формулы – вполне достаточно руководствоваться формальным алгоритмом.

Сначала найдём собственные значения

Составим характеристическое уравнение. Смотрим на исходную матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ и записываем её определитель, вычитая при этом «лямбду» из чисел *главной диагонали*:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Раскроем определитель и решим **квадратное уравнение**:

$$(-1-\lambda)(6-\lambda) - 2\cdot(-6) = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 + 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1;\ \sqrt{D} = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Таким образом, собственные значения: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$

Желательно располагать их в порядке возрастания, хотя это не принципиально.

Теперь найдём собственные векторы

В данном примере получены различные собственные числа и каждому из них соответствует свой собственный вектор.

1) Рассмотрим собственное число $\lambda_1 = 2$ и подставим значение $\lambda = \lambda_1 = 2$ в **однородную систему уравнений** $\begin{cases}(-1-\lambda)x - 6y = 0\\ 2x + (6-\lambda)y = 0\end{cases}$:

$$\begin{cases}-3x - 6y = 0\\ 2x + 4y = 0\end{cases}$$

Для записи системы целесообразно запомнить формальный приём: мысленно либо на черновике подставляем $\lambda = \lambda_1 = 2$ в определитель $\begin{vmatrix}-1-\lambda & -6\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix}$:

$\begin{vmatrix}-3 & -6\\ 2 & 4\end{vmatrix}$ – это и есть коэффициенты системы.

Из обоих уравнений следует:

$$\begin{cases}-3x - 6y = 0\\ 2x + 4y = 0\end{cases} \Rightarrow x = -2y$$

Если в ходе решения выяснилось, что линейной зависимости нет (т.е. получается только тривиальное решение $x = y = 0$) – ищите ошибку! Этот признак касается всех задач рассматриваемого типа.

Итак, в нашем распоряжении есть выражение $x = -2y$, и координаты собственного вектора $\overline{u} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ определены не однозначно. Стараемся подобрать значение «игрек» так, чтобы первая («иксовая») координата собственного вектора была **целой, положительной и минимальной**.

Пусть $y = -1$, тогда: $x = -2 \cdot (-1) = 2$

Обязательно проверяем, что частное решение $x = 2, y = -1$ удовлетворяет каждому уравнению системы:

$$-3x - 6y = -3 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) = -6 + 6 = 0$$

$$2x + 4y = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$$

Таким образом: $\overline{u}_1 = \begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$

2) Найдём второй собственный вектор. Для этого мысленно либо на черновике подставим $\lambda = \lambda_2 = 3$ в определитель $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix}$ и запишем вторую однородную систему:

$$\begin{cases} -4x - 6y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Из обоих уравнений следует, что $x = -\frac{3}{2}y$.

Положим $y = -2$, тогда: $x = -\frac{3}{2}\cdot(-2) = 3$

В результате, собственный вектор: $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Повторим важные моменты решения:

– полученная система $\begin{cases} -4x - 6y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ непременно имеет общее решение (уравнения линейно зависимы);

– «игрек» подбираем таким образом, чтобы первая «иксовая» координата была целой, положительной и как можно меньше.

– проверяем, что частное решение $x = 3, y = -2$ удовлетворяет каждому уравнению системы.

Ответ: собственные числа: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$, собственные векторы: $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Промежуточных «контрольных точек» было вполне достаточно, поэтому проверка равенств
$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, в принципе, дело излишнее.

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Пример 2

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример 2

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

Решение: *Найдем собственные значения. Составим и решим характеристическое уравнение:*

$$\begin{vmatrix}0-\lambda & 2\\ 3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$-\lambda(5-\lambda)-6=0$$

$$\lambda^2-5\lambda-6=0$$

$$D=25+24=49;\ \sqrt{D}=7$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{5\mp 7}{2}$$

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=6$ *– собственные значения.*

Найдем собственные векторы:

1) $\lambda=\lambda_1=-1$

$$\begin{cases}x+2y=0\\ 3x+6y=0\end{cases}\Rightarrow x=-2y$$

Пусть $y=-1\Rightarrow x=2$

$\bar{u}_1=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ *– собственный вектор.*

2) $\lambda=\lambda_2=6$

$$\begin{cases}-6x+2y=0\\ 3x-y=0\end{cases}\Rightarrow y=3x$$

Пусть $x=1\Rightarrow y=3$

$\bar{u}_2=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$ *– собственный вектор.*

Ответ: *собственные значения:* $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=6$*, собственные векторы:* $\bar{u}_1=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix},\ \bar{u}_2=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$.

Спасибо за внимание!