Линейная алгебра и аналитическая геометрия
Лекция 3
Тема: Размерность и базис линейного пространства

Литература:

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – СПб: Издательство «Лань», 2008, 256с.
2. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов: Практикум.– М.: Юнити-Дана, 2007, 479с.
3. Ефимов А.В., Поспелов А.С. и др. Сборник задач по математике. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 – М.: Оникс, 2006.

Линейное пространство V называется ***n*-*мерным***, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторы являются линейно зависимыми. Число n называется в этом случае размерностью линейного пространства V. Итак, число n называется ***размерностью линейного пространства*** V, если выполняются следующие условия:

1) в V существует n линейно независимых векторов;

2) любая система $n+1$ векторов из V линейно зависима.

Размерность линейного пространства V обозначается $\dim V$ (от французского слова dimension – размерность). Если пространство состоит из одного нулевого элемента, его размерность считают равной нулю. Введенное понятие размерности согласуется с наглядным представлением о ней; так, пространство V_3 всех свободных векторов является трехмерным ($\dim V_3 = 3$), пространство V_2 - двумерным, пространство V_1 - одномерным.

Базисом n-мерного линейного пространства V_n называется любая упорядоченная система n линейно независимых векторов этого пространства.

Линейное пространство, в котором имеется базис, состоящий из конечного числа векторов, называется ***конечномерным***. Примерами конечномерных пространств являются пространства V_1, V_2, V_3, A_n, рассмотренные выше.

Линейное пространство называется ***бесконечномерным***, если при любом натуральном числе m в нем найдется m линейно независимых векторов.

Примером бесконечномерного пространства будет множество всевозможных действительных функций действительного переменного, если сложение функций и их умножение на действительное число понимать так, как это принято в теории функций, т.е. как сложение или умножение на число значений функций при каждом значении независимого переменного.

Приведем примеры базисов некоторых линейных пространств.

1) Базис пространства V_3 образует любая тройка некомпланарных векторов, так как эти векторы линейно независимы.

2) Базис пространства V_2 образуют два любых неколлинеарных вектора, поскольку они линейно независимы и любой вектор плоскости, определяемый этими двумя векторами, можно разложить по ним.

3) Базисом линейного пространства V_1 является любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой.

4) Многочлены $p_0(x)=1$, $p_1(x)=x$, $p_2(x)=x^2$ образуют базис в пространстве P_2. Действительно, эти многочлены линейно независимы, и любой многочлен $p(x)=a+bx+cx^2$ из P_2 можно представить в виде линейной комбинации многочленов $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$.

5) Рассмотрим некоторое линейное пространство A_n, состоящее из векторов $x^i = \left(x_1^i,\ x_2^i,\ \ldots,\ x_n^i\right)$, $i = \overline{1, n}$. Докажем, что система векторов этого пространства

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1) \qquad (9.5)$$

- линейно независима, а совокупность $e_1, e_2, \ldots, e_n, x$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - любой элемент этого пространства, образует линейно зависимую систему, т.е. докажем, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют базис пространства A_n. Действительно, линейная комбинация векторов (9.5) представляет вектор

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

который является нулевым лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Это означает, что векторы (9.5) линейно независимы.

Поскольку

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

есть линейная комбинация векторов (9.5), то система $e_1, e_2, \ldots, e_n, x$ линейно зависима. Следовательно, линейное пространство A_n будет n-мерным, а система векторов (9.5) образует базис этого линейного пространства.

Очевидно следующее утверждение. *Если* $\dim R = n \geq 1$, *то в пространстве* R *существует базис из* n *элементов. В качестве базиса можно взять любые* n *линейно независимых элементов.*

Теорема *Пусть линейное пространство V_n обладает базисом $e_1, e_2, ..., e_n$. Тогда любой вектор x из V_n единственным образом представляется в виде*

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n. \quad (9.6)$$

Доказательство. В силу определения базиса линейного пространства V любой вектор $x \in V$ имеет хотя бы одно представление вида (9.6). Предположим, что наряду с разложением (9.6) есть и другое разложение

$$x = x_1' e_1 + x_2' e_2 + ... + x_n' e_n$$

вектора x. Тогда будет выполняться равенство

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n = x_1' e_1 + x_2' e_2 + ... + x_n' e_n,$$

которое приводит к равенству

$$(x_1 - x_1')e_1 + (x_2 - x_2')e_2 + ... + (x_n - x_n')e_n = 0.$$

Последнее равенство в силу линейной независимости системы векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ возможно лишь в том случае, когда

$$(x_1 - x_1') = 0, \quad (x_2 - x_2') = 0, \quad ..., \quad (x_n - x_n') = 0,$$

т.е. при $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, …, $x_n = x_n'$. Это доказывает, что разложение вектора по базису единственно.

Линейное выражение (9.6) вектора x через векторы базиса, единственное в силу сформулированной теоремы, называют ***разложением вектора x по базису*** $e_1, e_2, ..., e_n$. Это разложение удобно записывать в матричной форме

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n = (e_1, e_2, ..., e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e \cdot [x],$$

где $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ - заданный базис, записанный в виде матрицы-строки, а $[x]$ - столбец коэффициентов разложения вектора x по базису, называемых ***координатами вектора x в базисе e***.

Например, пусть V -пятимерное линейное пространство с базисом e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, найдем координаты векторов e_2 и $x = 3e_1 - e_3 + 2e_4$ в данном базисе.

Решение. Вектор x представим в виде

$$x = 3e_1 + 0e_2 + (-1)e_3 + 2e_4 + 0e_5,$$

следовательно, $(3, 0, -1, 2, 0)$ - координаты вектора x в базисе e_1, e_2, e_3, e_4, e_5.

Аналогично $e_2 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4 + 0e_5$, следовательно, $e_2(0, 1, 0, 0, 0)$ - координаты вектора e_2 в заданном базисе.

Векторы линейного пространства V полностью определяются своими координатами в данном базисе. При этом операции над векторами сводятся к аналогичным операциям над их координатами. Так, для векторов

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n \text{ и } y = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n$$

условие их равенства, $x = y$, равносильно условиям

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2, \ldots, \qquad x_n = y_n,$$

а равенства

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) + (y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n) = \\ &= (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + \ldots + (x_n + y_n)e_n \end{aligned} \tag{9.7}$$

и

$$\lambda x = \lambda(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = (\lambda x_1)e_1 + (\lambda x_2)e_2 + \ldots + (\lambda x_n)e_n$$

показывают, что при сложении векторов их соответствующие координаты складываются, при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Например, в некотором базисе даны векторы $x(2, -1, 3, 5)$ и $y(-1, 4, 0, -2)$. Найдем координаты вектора $2x - 3y$.

Решение. Учитывая свойство (9.7), находим координаты вектора $2x - 3y$:

$$(2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1),\ 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 4,\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0,\ 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-2)) = (7, -14, 6, 16).$$

Ранг системы векторов линейного пространства

Рассмотрим систему m векторов

$$\begin{cases} x_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}), \\ x_2 = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = (x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm}) \end{cases} \qquad (9.8)$$

линейного n-мерного пространства, координаты которых заданы в одном и том же базисе. Системе векторов (9.8) поставим в соответствие матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (9.9)$$

в k-м столбце которой записаны координаты вектора x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Матрицу (9.9) называют ***матрицей системы векторов*** (9.8) ***в данном базисе***, а ранг этой матрицы – ***рангом системы векторов*** $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Обратно, если дана матрица (9.9), ей можно поставить в соответствие систему (9.8) m векторов линейного n-мерного пространства. Столбцы матрицы (9.9) линейно зависимы, если векторы (9.8) линейно зависимы и обратно.

Приведем без доказательства теорему, которая позволяет судить о линейной независимости векторов, заданных своими координатами.

Теорема 9.11 *Для того чтобы* m *векторов линейного пространства были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен* m.

Следствие 1. *Система* n *векторов* n*-мерного линейного пространства линейно независима тогда и только тогда, когда матрица этой системы векторов является невырожденной.*

Следствие 2. *Если ранг матрицы системы* m *векторов линейного пространства равен* r, *максимальное число линейно независимых векторов этой системы равно* r.

Например, найдем максимальное число линейно независимых векторов в системе $a_1(1, 4, 2, 7)$, $a_2(-1, -2, -3, -6)$, $a_3(0, 5, 0, 5)$, $a_4(3, 0, 6, 9)$, $a_5(2, 3, 1, 6)$.

Решение. Матрица данной системы векторов имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 6 & 1 \\ 7 & -6 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Так как ранг этой матрицы равен трем, то максимальное число линейно независимых векторов этой системы равно трем.

Замечание. Можно доказать, что максимальное число линейно независимых строк всякой матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов, т.е. равно рангу этой матрицы.

Дополнение до базиса

В n-мерном пространстве базис составляют любые n линейно независимых элементов. Но как построить базис (и можно ли), если количество элементов меньше n

Рассмотр...

Теорема 1.4 (о дополнении базиса). Пусть система элементов $b_1, b_2, \ldots, b_k$ линейного пространства V размерности n линейно независима и $k < n$. Тогда в пространстве V найдутся элементы $b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n$ такие, что система $b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n$ — базис V.

◄ Пусть x — произвольный элемент линейного пространства V. Разложить произвольный элемент x линейного пространства V по элементам $b_1, b_2, \ldots, b_k$ можно не всегда, так как в противном случае система элементов $b_1, b_2, \ldots, b_k$ была бы базисом, а это невозможно в силу условия $k < n$. Поэтому должен существовать элемент $b_{k+1} \in V$ такой, что дополненная система элементов $b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}$ будет линейно независимой.

Если $k+1 = n$, то эта система является базисом линейного пространства V.

Если $k+1 < n$, то для системы $b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}$ следует повторить предыдущие рассуждения.

Следовательно, таким способом любая заданная линейно независимая система элементов может быть дополнена до базиса всего линейного пространства V. ►

Замечание 1.5. Дополнение имеющихся k линейно независимых элементов до базиса произвольными $n-k$ элементами соответствующей размерности может не дать n линейно независимых элементов. ■

Пример 1.4. Дополнить систему векторов

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

четырехмерного линейного пространства до базиса этого пространства.

◀ Составим матрицу из координат данных векторов:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее ранг равен двум, так как найдется минор второго порядка, отличный от нуля, например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

По теореме о базисном миноре векторы b_1 и b_2 линейно независимы.

Выберем векторы b_3 и b_4 так, чтобы матрица из координатных столбцов векторов b_1, b_2, b_3, b_4 имела определитель, отличный от нуля. Тогда ранг матрицы будет равен четырем и по теореме о базисном миноре векторы b_1, b_2, b_3, b_4 будут линейно независимыми. Возьмем, например,

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

и, следовательно, векторы b_1, b_2, b_3, b_4 линейно независимы. ▶

Матрица перехода от базиса к базису. Преобразование координат вектора

Рассмотрим в линейном пространстве V два базиса:

$$e_1, e_2, ..., e_n; \tag{9.10}$$

$$e_1', e_2', ..., e_n'. \tag{9.11}$$

Матрицей перехода от базиса (9.10) ***к базису*** (9.11) называется матрица системы векторов $e_1', e_2', ..., e_n'$ в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$.

Из определения следует, что если

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \tag{9.12}$$

есть матрица перехода от базиса (9.10) к базису (9.11), то

$$\begin{cases} e_1' = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n; \\ e_2' = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n' = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n \end{cases}$$

или

$$(\boldsymbol{e}_1' \ \boldsymbol{e}_2' \ \dots \ \boldsymbol{e}_n') = (\boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2 \ \dots \ \boldsymbol{e}_n) \cdot \boldsymbol{T}. \tag{9.13}$$

Из теоремы о линейной независимости векторов следует, что матрица перехода от базиса к базису является невырожденной и всякую невырожденную матрицу порядка n можно рассматривать как матрицу перехода от базиса к базису в n-мерном пространстве.

Очевидно, что матрица T^{-1}, обратная матрице (9.12), является матрицей перехода от базиса (9.11) к базису (9.10).

Например, рассмотрим в линейном пространстве M_2 базис i, j, а также базис e_1, e_2 (рисунок 103).

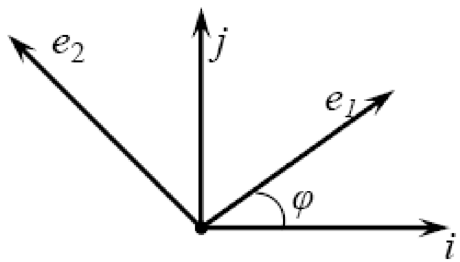


Рисунок 103

В этом случае

$$\begin{cases} e_1 = i\cos\varphi + j\sin\varphi; \\ e_2 = -i\sin\varphi + j\cos\varphi. \end{cases}$$

Следовательно, матрицей перехода от базиса i, j к базису e_1, e_2 является матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

тогда как матрицей перехода от базиса e_1, e_2 к базису i, j является матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Задача преобразования координат заключается в нахождении зависимости между координатами вектора в разных базисах.

Формулы, связывающие координаты вектора в разных базисах, называются ***формулами преобразования координат***.

Теорема 9.12 *Если* $x_1, x_2, ..., x_n$ *- координаты вектора* x *в базисе* $e_1, e_2, ..., e_n$, *а* $x_1', x_2', ..., x_n'$ *- координаты этого же вектора в базисе* $e_1', e_2', ..., e_n'$, *то имеет место следующее соотношение*:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \tag{9.14}$$

или

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{TX}',$$

где $X = (x_1\ x_2\ ...\ x_n)^T$; $X' = (x_1'\ x_2'\ ...\ x_n')^T$; T *- матрица перехода от базиса* $e_1, e_2, ..., e_n$ *к базису* $e_1', e_2', ..., e_n'$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что

$$x = (e_1\ e_2\ ...\ e_n)X; \tag{9.15}$$

$$x = (e_1'\ e_2'\ ...\ e_n')X'. \tag{9.15'}$$

Учитывая соотношение (9.13), из равенства (9.15)' получаем

$$x = (e_1\ e_2\ ...\ e_n)TX'. \tag{9.16}$$

Так как равенства (9.15) и (9.16) есть символическая запись разложения вектора x по базису $e_1, e_2, ..., e_n$, а для каждого вектора разложение единственно, то

$$X = TX'. \tag{9.17}$$

Из соотношение (9.17) выразим матрицу X', имеем

$$TX' = X,$$

$$T^{-1}TX' = T^{-1}X.$$

Таким образом матрица X' запишется в виде

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{X}. \tag{9.18}$$

Формулы (9.17) и (9.18) являются *формулами преобразования координат.*

Например, пусть вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $(1, -2)$. Найдем координаты этого вектора в базисе $e_1' = e_1,\ e_2' = e_1 + e_2$.

Решение. Матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2' имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомые координаты x_1', x_2' находим по формуле (9.18):

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица, обратная матрице T, имеет вид:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

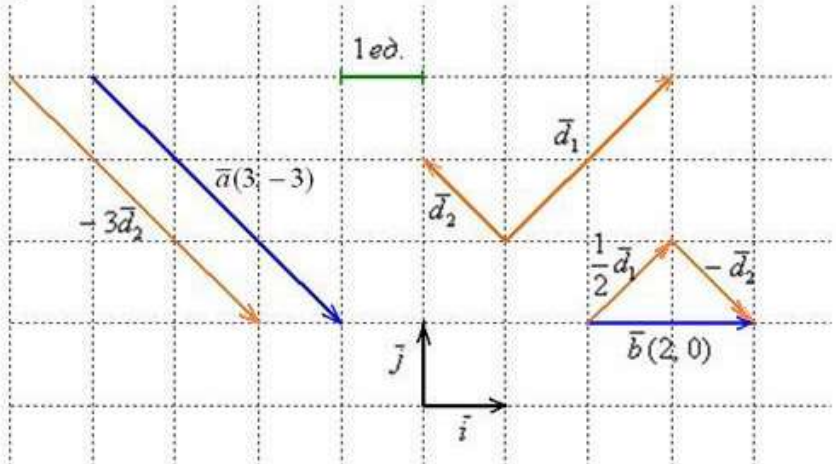
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1' = 3,\ \ x_2' = -2$.

Переход к новому базису

Как вы прекрасно знаете, любой другой вектор $\bar{v}$ плоскости тоже можно разложить по базисным векторам: $\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j}$ *(причём единственным образом)* и записать коэффициенты этого разложения (координаты) в скобках: $\bar{v}(v_1; v_2)$

В качестве демонстрационного базиса можно взять любую пару неколлинеарных векторов, но для удобства объяснений я рассмотрю следующий *ортогональный* базис $(\bar{d}_1; \bar{d}_2)$:



Обратите внимание, что новый базис не является ортонормированным – длины его векторов отличны от единицы:

$|\bar{d}_1| = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ ед., $|\bar{d}_2| = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ ед.

Наверное, все понимают происходящие события – когда меняется власть, то все подстраиваются под эту власть. Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы найти разложения тех же самых векторов по НОВОМУ базису. На иллюстрации хорошо видно готовые результаты:

$\bar{a} = 0 \cdot \bar{d}_1 - 3\bar{d}_2$, то есть $(0; -3)$ – это координаты вектора «а» в базисе $(\bar{d}_1; \bar{d}_2)$;

$\bar{b} = \frac{1}{2}\bar{d}_1 + (-\bar{d}_2)$ и $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ – есть координаты вектора «бэ» в новом базисе.

нам нужно изучить **аналитический метод** перехода от одного базиса к другому. Очевидно, что для осуществления такого перехода необходимо как-то связать векторы старого и нового базиса. Первое, что приходит в голову – это разложить векторы «пришлой власти» по базису $(\bar{i}; \bar{j})$:

$\bar{d}_1 = 2\bar{i} + 2\bar{j}$

$\bar{d}_2 = -\bar{i} + \bar{j}$

Коэффициенты разложений напрашивается записать в **матрицу**: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Или так: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. ... И ту, и другую матрицу называют **матрицей перехода** от базиса $(\bar{i}; \bar{j})$ к базису $(\bar{d}_1; \bar{d}_2)$. По техническим причинам чаще встречается 2-й вариант – когда коэффициенты «укладывают» в столбцы. Но от красивой записи толку мало, и сейчас нам предстоит разобраться, как связаны между собой координаты v_1, v_2 произвольного вектора $\bar{v}$ *в старом базисе* $(\bar{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j})$ с его соответствующими координатами v_1', v_2' *в новом базисе* $(\bar{v} = v_1'\bar{d}_1 + v_2'\bar{d}_2)$.

Для решения нашей задачи подставим разложения $\bar{d}_1 = 2\bar{i} + 2\bar{j}, \quad \bar{d}_2 = -\bar{i} + \bar{j}$ во 2-е равенство, раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$\bar{v} = v_1'\bar{d}_1 + v_2'\bar{d}_2 = v_1'(2\bar{i} + 2\bar{j}) + v_2'(-\bar{i} + \bar{j}) = 2v_1'\bar{i} + 2v_1'\bar{j} - v_2'\bar{i} + v_2'\bar{j} = (2v_1' - v_2')\bar{i} + (2v_1' + v_2')\bar{j}$$

Таким образом, с одной стороны, в нашем распоряжении есть старое разложение $\bar{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j}$, но с другой стороны мы получили $\bar{v} = (2v_1' - v_2')\bar{i} + (2v_1' + v_2')\bar{j}$.
Поскольку разложение вектора по базису *единственно*, то справедливы следующие равенства:

$$v_1 = 2v_1' - v_2'$$

$$v_2 = 2v_1' + v_2'$$

С помощью полученных соотношений можно найти СТАРЫЕ координаты, если известны новые.
Запишем формулы в виде простейшего **матричного уравнения:**

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$$

и выполним проверку, тестируя наши подопытные векторы «а» и «бэ»:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Что и требовалось проверить. Надеюсь, ни у кого не возникло проблем с **матричным умножением**. Хотя, в случае аварийных недоразумений всегда можно подставить новые координаты в равенства $\begin{matrix} v_1 = 2v_1' - v_2' \\ v_2 = 2v_1' + v_2' \end{matrix}$ и получить те же самые результаты.

Всё хорошо, всё правильно, но нам-то нужно наоборот – из старых координат получить новые. Давайте присмотримся к нашему матричному уравнению

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$ .... В его середине находится матрица с координатами векторов $\bar{d}_1 = 2\bar{i} + 2\bar{j}, \quad \bar{d}_2 = -\bar{i} + \bar{j}$, которые записаны в столбцы. И, обозначив $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, V' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$, перепишем уравнение в компактном виде:

$V = A \cdot V'$

Для того чтобы выразить новые координаты через старые, умножим обе части на A^{-1} слева:

$A^{-1} \cdot V = A^{-1} A \cdot V'$

$A^{-1} \cdot V = E \cdot V'$

$A^{-1} \cdot V = V'$

В результате ситуация разрешилась самым благоприятным образом:

$V' = A^{-1} \cdot V$

Теперь нужно найти **обратную матрицу**. Так как векторы базиса линейно независимы, то определитель $|A| \neq 0$ и обратная матрица заведомо существует $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ – тот редкий случай, когда дробь целесообразно затолкать в матрицу.

Пользуясь уравнением $\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, вычислим координаты векторов $\bar{a}(3; -3), \quad \bar{b}(2; 0)$ в базисе $(\bar{d}_1; \bar{d}_2)$:

$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot (-3) \\ -\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, то есть $\bar{a} = 0 \cdot \bar{d}_1 - 3\bar{d}_2 = -3\bar{d}_2$;

$\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$, то есть $\bar{b} = \frac{1}{2}\bar{d}_1 - \bar{d}_2$.

Желающие могут протестировать другие «сподручные» векторы и свериться с чертежом.

Нетрудно догадаться, что <u>в столбцах</u> полученной матрицы A^{-1} находятся коэффициенты разложения векторов старого базиса по векторам нового базиса:

$\bar{i} = \frac{1}{4}\bar{d}_1 - \frac{1}{2}\bar{d}_2$

$\bar{j} = \frac{1}{4}\bar{d}_1 + \frac{1}{2}\bar{d}_2$

(убедитесь по чертежу в справедливости этих разложений)

и матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ называется *(именно так!)* матрицей перехода от базиса $(\bar{d}_1; \bar{d}_2)$ к базису $(\bar{i}; \bar{j})$.

Систематизируем алгоритм решения данной задачи: итак, заданы два [произвольных базиса](#) плоскости $(\bar{e}_1; \bar{e}_2)$, $(\bar{e}_1'; \bar{e}_2')$, при этом векторы 2-го базиса выражены через векторы 1-го:

$\bar{e}_1' = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2$

$\bar{e}_2' = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2$

*! **Обозначения:** в данном контексте двойные подстрочные индексы имеют следующий смысл: 1-я цифра обозначает номер координаты, 2-я цифра – номер вектора:*

a_{11} *– 1-я координата 1-го вектора (вектора* $\bar{e}_1'$*),* a_{21} *– 2-я координата 1-го вектора;*

a_{12} *– 1-я координата 2-го вектора (вектора* $\bar{e}_2'$*),* a_{22} *– 2-я координата 2-го вектора.*

В базисе $(\bar{e}_1; \bar{e}_2)$ дан вектор $\bar{v}(v_1; v_2)$. Требуется найти его координаты v_1', v_2' в базисе $(\bar{e}_1'; \bar{e}_2')$.

На первом шаге составляем матричное уравнение, при этом коэффициенты разложений $\begin{matrix} \bar{e}_1' = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 \\ \bar{e}_2' = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 \end{matrix}$ «укладываем» <u>в столбцы</u> матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

(векторы $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$ *следует «перебирать»* ***строго по порядку****!)*:

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$ или, если компактнее: $V = AV'$

Уравнение, кстати, легко преобразовать в формулы, выражающие старые координаты через новые. Выполняем матричное умножение:

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1' + a_{12}v_2' \\ a_{21}v_1' + a_{22}v_2' \end{pmatrix}$

Две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы:

$v_1 = a_{11}v_1' + a_{12}v_2'$

$v_2 = a_{21}v_1' + a_{22}v_2'$

Находим обратную матрицу A^{-1} и, вычисляя произведение $A^{-1} \cdot V$, получаем координаты вектора $\bar{v}$ в базисе $(\bar{e}_1'; \bar{e}_2')$:

$V' = A^{-1} \cdot V = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$

Пусть в n-мерном пространстве V заданы два базиса старый f=(f1,f2,..fn) и новый g=(g1,g2,..gn)

су $\{f\}$. В частности, каждый элемент нового базиса можно линейно выразить через элементы старого базиса:

$$\begin{cases} g_1 = p_{11}f_1 + p_{21}f_2 + \ldots + p_{n1}f_n, \\ g_2 = p_{12}f_1 + p_{22}f_2 + \ldots + p_{n2}f_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n = p_{1n}f_1 + p_{2n}f_2 + \ldots + p_{nn}f_n. \end{cases} \tag{1.9}$$

Соотношения (1.9) удобно записать в виде

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{G} = \mathbf{FP}, \tag{1.10}$$

где $\mathbf{G}$ — матрица координат элементов нового базиса, расположенных по столбцам; $\mathbf{F}$ — матрица координат элементов старого базиса, также расположенных по столбцам.

Определение 1.9. Матрицу

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

называют ***матрицей перехода*** от старого базиса $\{f\}$ к новому базису $\{g\}$.

Свойства матрицы перехода

Рассмотрим некоторые свойства матрицы перехода.

1°. Определитель матрицы перехода **P** не равен нулю, т. е. матрица перехода невырожденная и поэтому имеет обратную.

◄ Действительно, если бы $\det \mathbf{P} = 0$, то из этого равенства следовало бы, что один из столбцов матрицы **P** является линейной комбинацией остальных столбцов. Но тогда один из элементов g_i

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}. \qquad (1.12)$$

Матрица перехода $\mathbf{P}^{-1}$ от нового базиса $\{g\}$ к старому базису $\{f\}$ из матричного уравнения (1.12) имеет вид

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}. \blacktriangleright \qquad (1.13)$$

есть линейная комбинация других элементов этого базиса, что невозможно. Значит, матрица **P** невырожденная и имеет обратную матрицу $\mathbf{P}^{-1}$. ►

2°. Если $\det \mathbf{P} \neq 0$, то столбцы матрицы перехода линейно независимы и, значит, элементы $g_1, \ldots, g_n$, получающиеся из базисных элементов $f_1, \ldots, f_n$ с помощью матрицы **P**, линейно независимы, т. е. образуют некоторый базис. Значит, матрицей перехода может служить любая квадратная матрица порядка n с отличным от нуля определителем.

3°. Если **P** — матрица перехода от старого базиса к новому базису линейного пространства, то $\mathbf{P}^{-1}$ — матрица перехода от базиса $\{g\}$ к базису $\{f\}$.

◄ Поскольку матрица перехода **P** невырожденная, из равенства $\mathbf{G} = \mathbf{F}\mathbf{P}$ следует, что $\mathbf{G}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{F}$. Это равенство означает, что столбцы матрицы $\mathbf{P}^{-1}$ являются столбцами координат элементов базиса $\{f\}$ относительно базиса $\{g\}$, т. е., согласно определению 1.9, $\mathbf{P}^{-1}$ — это матрица перехода от базиса $\{g\}$ к базису $\{f\}$. ►

4°. Пусть в линейном пространстве заданы базисы $\{f\}$, $\{g\}$ и $\{d\}$ и пусть **P** — матрица перехода от базиса $\{f\}$ к базису $\{g\}$, а **L** — матрица перехода от базиса $\{g\}$ к базису $\{d\}$. Тогда произведение этих матриц **PL** есть матрица перехода от базиса $\{f\}$ к базису $\{d\}$.

◄ Согласно определению матрицы перехода, имеем следующие равенства:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}\mathbf{P}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{G}\mathbf{L},$$

где **D** — матрица координат базиса $\{d\}$. Тогда

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}\mathbf{L} = (\mathbf{F}\mathbf{P})\mathbf{L} = \mathbf{F}(\mathbf{P}\mathbf{L}),$$

т. е. **PL** — матрица перехода от базиса $\{f\}$ к базису $\{d\}$.

Примечание. Из соотношения $\mathbf{G} = \mathbf{F}\mathbf{P}$ где **P** — матрица перехода от базиса $\{f\}$ к базису $\{g\}$ как матричного уравнения относительно матрицы **P**, находим, что

Пример 4. Относительно базиса $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ даны четыре вектора $\bar{f}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{f}_2 = (1, 2, 1)$, $\bar{f}_3 = (1, 2, 2)$ и $\bar{x} = (1, 1, 0)$. Векторы $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ можно принять за базис в R_3. Найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$.

Решение. Матрица перехода от базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ к базису $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ имеет вид $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Обозначим координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ через x_1, x_2, x_3.

Согласно формулам (5), имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Находим C^{-1}: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$

$$A_1^1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2; \; A_2^1 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \; A_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_1^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \; A_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \; A_3^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_1^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \; A_2^3 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \; A_3^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+0 \\ 0+1+0 \\ -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$\bar{x} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 - \bar{f}_3$ или $\bar{x} = (1, 1, -1)$.

Спасибо за внимание!