В 21.

№2.1. Векторы заданы своими координатами в каноническом базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ линейного пр-ва V_3. Показать, что в-ры образуют базис пр-ва V_3.

Найти разложение вектора $\bar{d}$ по этому базису. Сделать проверку.

$\bar{a}\,(4, -5, 7)$

$\bar{b}\,(1, 0, -2)$

$\bar{c}\,(2, -1, 0)$

$\bar{d}\,(-3, 4, -10)$

Три линейно независ. вектора образуют базис. Проверим $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ на линейную нез-ть

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4(0-2) - 1(0+7) + 2(10) =$$

$= -8 - 7 + 20 = 5 \neq 0 \Rightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - линейно независимые $\Rightarrow$ они образуют базис $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ вектор $\bar{d}$ можно разложить по этому базису, т.е $\exists$ числа x, y, z, такие что:

$\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$.

В координатах:

$$x\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-5\\0\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}7\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\-10\end{pmatrix}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases}4x-5y+7z=-3\\ x\qquad -2z=4\\ 2x-y\qquad=-10\end{cases}$$

Решим систему методом Крамера

$\Delta=5$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-3&-5&7\\4&0&-2\\-10&-1&0\end{vmatrix}=-3(-2)-4(7)+10(-10)=$$

$$=6-28-100=-122$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}4&-3&7\\1&4&-2\\2&-10&0\end{vmatrix}=4(-20)-1(70)+2(6-28)=$$

$$=-80-70+(-44)=-194$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}4&-5&-3\\1&0&4\\2&-1&-10\end{vmatrix}=4(4)-1(50-3)+2(20)=$$

$$=16-47-40=-71$$

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{122}{5}$

$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-194}{5}$

$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-71}{5}$, т.е

$\bar{d} = -\frac{122}{5}\bar{a} - \frac{194}{5}\bar{b} - \frac{71}{5}c$

Проверка: $-\frac{122}{5}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{194}{5}\begin{pmatrix}-5\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{71}{5}\begin{pmatrix}7\\-2\\0\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}-\frac{488}{5}\\ -\frac{122}{5}\\ -\frac{244}{5}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-194\\0\\ -\frac{194}{5}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{497}{5}\\ -\frac{142}{5}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{15}{5}\\ \frac{20}{5}\\ -\frac{50}{5}\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}-3\\4\\-10\end{pmatrix}$ Верно

№2.2 Является ли множество

$L = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ векторов заданного вида линейным подпространством в R_3? Если да, то найти базис и размерность этого подпр-ва. Дополнить базис подпр-ва L до базиса всего пр-ва R_3. Выписать матрицу перехода от канонического базиса пр-ва R_3 к построенному базису.

а) $(-a-3b, a+2, 2a-b)$

б) $(-a-3b, a+2b, 2a-b)$

а) 1. $H = \{(-a-3b, a+2, 2a-b)\}$

$h_1 = (-a_1-3b_1, a_1+2, 2a_1-b_1)$

$h_2 = (-a_2-3b_2, a_2+2, 2a_2-b_2)$

$h_1+h_2 = (-(a_1+a_2)-3(b_1+b_2); \underbrace{(a_1+a_2)+4}; 2(a_1+a_2)-(b_1+b_2))$ нарушена структура $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Не является линейным подпространством.

б) 2. $h = (-a-3b, a+2b, 2a-b) = (-a; a; 2a) + (-3b; 2b; -b) = a(-1; 1; 2) + b(-3; 2; -1)$

$e_1 = (-1; 1; 2)$

$e_2 = (-3; 2; -1)$

$e_3 = (1; 0; 0)$; $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r = 3 \Rightarrow$ обр. базис, тогда

$P_{\{к.б\} \to \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. $H = \{(-a-3b, a+2b, 2a-b)\}$

$h_1 = (-a_1 - 3b_1; a_1 + 2b_1, 2a_1 - b_1)$

$h_2 = (-a_2 - 3b_2; a_2 + 2b_2, 2a_2 - b_2)$

$h_1 + h_2 = (-(a_1+a_2) - 3(b_1+b_2), (a_1+a_2) + 2(b_1+b_2), 2(a_1+a_2) - (b_1+b_2)) \Rightarrow$ является линейным подпространством.

№ 2.3

$L = \{at^2 + bt + c\}$

$e_1 = t^2 = xt^2 + yt + z \cdot 1 = 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t + 0 \cdot 1 = (1; 0; 0)$

$e_2 = t = 0 \cdot t^2 + 1 \cdot t + 0 = (0; 1; 0)$

$e_3 = 1 = (0; 0; 1)$

$H = \{2bt^2 + (3a+2b)t + (a+3b)\}$

$h = 2bt^2 + 3at + 2bt + a + 3b = b(2t^2 + 2t + 3) + a(3t + a)$

$e_1 = 2t^2 + 2t + 3 = (2; 2; 3)$

$e_2 = 3t + 1 = (0; 3; 1)$

$e_3 = 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t + 1 \cdot 1 = (0; 0; 1)$

$h = -2t^2 + 7t = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 = 2t^2x + 2tx + 3x + 3ty + y =$

$= 2t^2x + t(2x + 3y) + (3x + y)$

$x = -1$

$2x + 3y = 7 \Rightarrow y = \frac{9}{3}$; $y = 3$

$h = -e_1 + 3e_2$

<u>№ 2.4</u>

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 2b & a+3b \\ 5a-2b & a-3b \end{pmatrix}, a, b \in R \right\}$$

$$m_1 = \begin{pmatrix} 2b_1 & a_1+3b_1 \\ 5a_1-2b_1 & a_1-3b_1 \end{pmatrix}$$

$$m_2 = \begin{pmatrix} 2b_2 & a_2+3b_2 \\ 5a_2-2b_2 & a_2-3b_2 \end{pmatrix}$$

$$m_1+m_2=\begin{pmatrix} 2(b_1+b_2) & (a_1+a_2)+3(b_1+b_2) \\ 5(a_1+a_2)-2(b_1+b_2) & (a_1+a_2)-3(b_1+b_2) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Лин. подпр-во в $M_{2\times 2}$

$$m=\begin{pmatrix} 2b & 3b \\ -2b & -3b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & a \\ 5a & a \end{pmatrix}=$$

$$=\underbrace{b\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}_{e_1}+\underbrace{a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2}$$

$$x\cdot e_1+y\cdot e_2=0$$

$$\begin{pmatrix} 2y & x+3y \\ 5x-2y & x-3y \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} 2y=0 \\ 5x-2y=0 \\ x+3y=0 \\ x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \Bigg| \Rightarrow e_1, e_2 \text{ – линейно-независимые}$$

$$E=\begin{pmatrix} 2b & a+3b \\ 5a-2b & a-3b \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E = aE_1 \cdot bE_2 +$ $\Rightarrow \{E_1, E_2\}$

Образуют полную систему. $\dim M = 2$

№ 2.5 $\hat{A}$ в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ задан матрицей A. Найти матрицу $\hat{A}$ в базисе $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$

$\bar{f}_1 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$

$\bar{f}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_3$

$\bar{f}_3 = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$

Решение.

$$P_{\bar{e} \to f} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} +\text{III} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)2 = -4$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad P^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} P^T = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_f = P^{-1} \cdot A_e \cdot P = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 4 & -5 & 13 \\ -12 & 3 & -11 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{13}{4} \\ 3 & -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

№2.6 $\hat{A}$ действует в R^3, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$.
$\hat{A}$ – лин.? Если да, записать матрицу $\hat{A}$ в каноничн. базисе пр-ва R^3

а) $\hat{A}\bar{x} = (x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_1, 7)$

б) $\hat{A}\bar{x} = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 - 5x_3, x_1 + 7x_2 - 7x_3)$.

Проверим линейность операторов

а) $\hat{A}(\bar{x}+\bar{y}) = (x_1+y_1+3(x_2+y_2)+2(x_3+y_3),$

$x_1+y_1, 7) = (x_1+3x_2+2x_3, x_1, 7) +$

$+ (y_1+3y_2+2y_3, y_1, 7)$

$\hat{A}\bar{x}+\hat{A}\bar{y} = (x_1+x_2+3(x_2+y_2)+2(x_3+y_3), x_1+y_1, 14) \neq \hat{A}(\bar{x}+\bar{y})$

Условие линейности оператора не выполняется => $\hat{A}$ не является линейным оператором.

б) 1. $\hat{A}(\bar{x}+\bar{y}) = (2(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3), (x_1+y_1)-$
$-5(x_3+y_3), (x_1+y_1)+7(x_2+y_2)-7(x_3+y_3)) =$

$= (2x_1+x_2+x_3, x_1-5x_3, x_1+7x_2-7x_3) +$

$+(2y_1+y_2+y_3, y_1-5y_3, y_1+7y_2-7y_3) = \hat{A}\bar{x}+\hat{A}\bar{y}$

2. $\hat{A}(\alpha\bar{x}) = (2\alpha x_1+\alpha x_2+\alpha x_3, \alpha x_1-5\alpha x_3,$
$\alpha x_1+7\alpha x_2-7\alpha x_3) = \alpha(2x_1+x_2+x_3, x_1-5x_3,$
$x_1+7x_2-7x_3) = \alpha\hat{A}\bar{x}$

Условие линейности выполняются =>

$\Rightarrow \hat{A}$ - линейный оператор.

Найдём матрицу лин. оператора в канон базисе $\bar{e}_1 = (1,0,0)$; $\bar{e}_2 = (0,1,0)$; $\bar{e}_3 = (0,0,1)$.

Подействуем линейным оператором на вектор $\bar{e}_1$, чтобы найти $\hat{A}\bar{e}_1$. т.е подставим координаты в $\hat{A}\bar{x}$.

$\hat{A}\bar{e}_1 = (2,1,1)$

$\hat{A}\bar{e}_2 = (1,0,7)$

$\hat{A}\bar{e}_3 = (1,-5,-7)$

Матрица лин. оператора A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

№2.7

$\hat{A} = (t-1)p'(t)$. Обратимый? Если да, то найти матрицу обр. $\hat{A}$ в каноничн. базисе пр-ва R^3, сделать проверку.

Образ вектора $\bar{x} = (-1;2;3)$. Ядро $\hat{A}$?

Явл. ли $\bar{x} = (0,1,0)$ собств. вектором $\hat{A}$?

$\hat{A}p(t) = (t-1)p'(t)$ $\quad$ $p(t) = t^2 + 2t + 3$

1. $P_2 = \{ax^2 + bx + c\}$

$\hat{A}p(t) = (t-1)\,p'(t)$ $\quad p(t) = t^2 + 2t + 3$

$p'(t) = 2t + 2$

$\hat{A}p(x) = (t-1)(2t+2) = 2t^2 + \cancel{2t} - \cancel{2t} - 2 = 2(t^2-1)$

Общий вид образа

2. Матрица в каноничн. базисе $Б_2 = \{\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$

$\vec{e}_0 = 1,\ \bar{e}_1 = t,\ \bar{e}_2 = t^2$

$\hat{A}\bar{e}_0 = (t-1)\cdot 0 = (0,0,0)$

$\hat{A}\bar{e}_1 = (t-1)\cdot 1 = t-1 = (-1,1,0)$

$\hat{A}\bar{e}_2 = (t-1)\cdot 2t = 2t^2 - 2t = (0;-2;2)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \mathrm{III} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = (-1)\cdot(-1)(0) = 0 \Rightarrow A^{-1} \nexists \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{A}$ – необратим

$\mathrm{Ker}\,\hat{A} \neq \{\bar{0}\}$

$\mathrm{Im}\,\hat{A} \neq P_2$

№2.8 $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Собств. знач.

$\det(A-\lambda E)=0$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)((5-\lambda)(1-\lambda)) -$$

$$-1(2(1-\lambda)) = (6-\lambda)(5-5\lambda-\lambda+\lambda^2)-(2-2\lambda)=$$

$$=(6-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5)+2\lambda-2 = 6\lambda^2-36\lambda+30-$$

$$-\lambda^3+6\lambda^2-5\lambda+2\lambda-2 = -\lambda^3+12\lambda^2-39\lambda+28=$$

$$=-(x-1)(x-4)(x-7)$$

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=7$ – Собственные значения

$\lambda_1=1$ Подставим!

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x_3 – базисное

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\overset{+\text{II}}{\sim}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -12 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad rA=2$$

$x_{1,2}$ – базисные

$$\begin{cases} 5x_1 = -2x_2 - 2x_3 \\ x_2 = \frac{12}{18}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-60}{18}x_3 \\ x_2 = \frac{12}{18}x_3 \end{cases}; \quad x_3 = c \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2}{3}c \\ x_2 = \frac{2}{3}c \end{cases}$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}c \\ \frac{2}{3}c \\ c \end{pmatrix} \text{ — собственные вектора } \lambda_1 = 1$$

$\lambda_2 = 4$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad rA = 2; \quad x_1, x_3 \text{ -базисные}; \quad x_2 = c$$

$$\begin{cases} x_1 = -c \\ x_3 = 0 \\ x_2 = c \end{cases} \Rightarrow x^1 = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \text{ -собственные вектора } \lambda_2 = 4$$

$\lambda_3 = 7$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\text{II} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad rA = 2, \quad x_1, x_3 \text{ -базисные}, \quad x_2 = c$$

$$\begin{cases} x_1 = -c \\ x_2 = c \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^1 = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \text{ -собственные вектора } \lambda_3 = 7$$

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}c & -c & -c \\ \frac{2}{3}c & c & c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\text{II} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}c & -c & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(P) = 1$

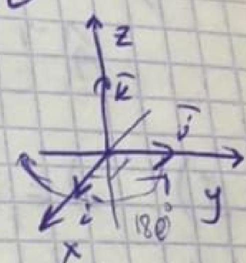
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \hat{A}$ - оператор простого типа

М-ца в собственном базисе:

$$A_{\text{соб.баз}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 2.9

а) $\hat{A}$ = Поворот вокруг оси OZ на 180°



$\bar{a} = (1, 2, -3)$

Подействуем л.о на $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$

$$\hat{A}\bar{i} = -\cos\alpha\,\bar{i} + \sin\alpha\,\bar{j} + 0\cdot\bar{k}$$

$$\hat{A}\bar{j} = \sin\alpha\,\bar{i} - \cos\alpha\,\bar{j} + 0\cdot\bar{k}$$

$$A\bar{k} = 0\cdot\bar{i} + 0\cdot\bar{j} + 1\cdot\bar{k}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \pi$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

б) $\bar{y} = \hat{A}\bar{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

в) $\alpha = \pi$

$\ker \hat{A} = \{\bar{0}\}$

$\operatorname{Im} \hat{A} = V_3 \cdot (rA = 3)$

г) $\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \hat{A}$ обратим

$\hat{A}^{-1}$ - поворот вокруг OZ по часовой стрелке

д) $\lambda = 1$ соотв. собств. вектору $\bar{k}$.

$$\begin{vmatrix} -\cos\alpha - \lambda & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left((-\cos\alpha-\lambda)(-\cos\alpha-\lambda) - \sin^2\alpha\right) = 0$$

$\lambda_1 = 0$

$$2\lambda\cos\alpha + \cos^2\alpha + \lambda^2 - 1 + \cos^2\alpha = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda\cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 0$$

$$D = 4\cos^2\alpha + 4 \leq 0$$

$\cos\alpha = \pm 1$, $\alpha = \pi k$

$\alpha = \pi \quad \lambda_{2,3} = -1$

№2.10

а) $\hat{A}(p)t = (t-1)p'(t)$

$p(t) = t^2+2t+3$

Проверим линейность оператора:

$\hat{A}(p_1(t)+p_2(t)) = (t-1)(p_1(t)+p_2(t)) =$

$= (t-1)(p_1(t))' + (t-1)(p_2(t))' =$

$= \hat{A}(p_1(t)) + \hat{A}(p_2(t))$

$\hat{A}(\alpha p(t)) = (t-1)(\alpha p(t))' = \alpha(t-1)(p(t))' =$

$= \alpha \hat{A}(p(t))$

б) Матрица A в каноническом базисе:

$\bar{e}_0 = 1 \quad \bar{e}_1 = t \quad \bar{e}_2 = t^2$

$\hat{A}\bar{e}_0 = 0 = (0,0,0)$

$\hat{A}\bar{e}_1 = (t-1)1 = t-1 = (-1;1;0)$

$\hat{A}\bar{e}_2 = (t-1)\cdot 2t = 2t^2-2t = (0;-2;2)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

в) Образ $p(t)$

$p(t) = (1; 2; 3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A}p(t) = -2 - 4t + 6t^2$$

г) Ядро $\hat{A}$

$Ax = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad rA = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Система имеет ед.реш.

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = (0, 0, 0) \Rightarrow Ker\,\hat{A} = \{\bar{0}\}$$

д) т.к. $Ker\,\hat{A} = \{\bar{0}\} \Rightarrow A^{-1} \nexists$; оператор обратим.

№2.11

$\hat{A}(p(t)) = t p'(t-2)$

$p(t) = 3t^2 - 5$

а) $\hat{A}(p_1(t-2) + p_2(t-2)) = t(p_1'(t-2) + p_2'(t-2)) =$

$= t p_1'(t-2) + t p_2'(t-2) = \hat{A}(p_1(t)) + \hat{A}(p_2(t))$

$\hat{A}(\alpha p(t-2)) = t(\alpha p(t-2))' = \alpha(t p'(t-2)) = \alpha \hat{A}(p(t-2))$

$\Rightarrow \hat{A}$ - линейный

б) $\bar{e}_0 = 1 \quad \hat{A}\bar{e}_0 = t \cdot 1' = 0 = (0,0,0)$

$\bar{e}_1 = t \quad \hat{A}\bar{e}_1 = t \cdot 1 = (0,1,0)$

$\bar{e}_2 = t^2 \quad \hat{A}\bar{e}_2 = t \cdot 2t = 2t^2 = (0,0,2)$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ - м-ца л.о в канон. базисе P_2

в)

$p(t) = 3t^2 - 5 = -5e_0 + 0\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 = (-5, 0, 3)$

$\hat{A}p(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 6t^2$

г) $\ker \hat{A} = ?$

$Ax = 0$

$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $r(A)=2$, система имеет множество решений

$$\begin{cases}x_1=C\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$

$\ker\hat{A}=\{p(t)=ct,\ c\in R\}$

9) $\hat{A}^{-1}\nexists$ т.к 1) $\ker\hat{A}\neq 0$

2) $\mathrm{Im}\,\hat{A}\neq P$

3) $\det A=0$

№ 2.12

1. $\varphi(\bar{x})=4x_1^2+3x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2-12x_1x_3$

$=\left[4x_1^2-4x_1x_2-12x_1x_3\right]+\left[3x_2^2+7x_3^2+10x_2x_3\right.$

$=\left[4x_1^2-x_1(4x_2+12x_3)+(4x_2+12x_3)^2\right]-(4x_2$

$=\left[4x_1^2-x_1(4x_2\right.$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, $r(A)=2$, система имеет множество решений

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\ker \hat{A} = \{p(t) = ct,\ c \in R\}$

9) $\hat{A}^{-1} \nexists$ т.к 1) $\ker \hat{A} \neq 0$

2) $\operatorname{Im} \hat{A} \neq P$

3) $\det A = 0$

№ 2.12

1.) $\varphi(\bar{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 - 12x_1x_3 + 10x_2x_3 =$

$= [4x_1^2 - 4x_1x_2 - 12x_1x_3] + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 10x_2x_3 =$

$= 4x_1^2 - 4x_1(x_2 + 3x_3) + (x_2 + 3x_3)^2 - (x_2 + 3x_3)^2 +$

$+ 3x_2^2 + 7x_3^2 + 10x_2x_3 = (2x_1 - x_2 - 3x_3)^2 - (x_2 + 3x_3)^2 +$

$+ 3x_2^2 + 7x_3^2 + 10x_2x_3$

$y_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3$

$\varphi(\bar{x}) = y_1^2 - x_2^2 - 6x_2x_3 - 9x_3^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 10x_2x_3 =$

$= y_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2 = y^2 + \Theta(x_2, x_3)$

$\Theta(x_2, x_3) = 2x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2 =$

$= 2\left((x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3) - 2x_3^2\right) = 2(x_2 + x_3)^2 -$
$-4x_3^2$

$y_2 = x_2 + x_3$; $y_3 = x_3$

$\Theta(x_2, x_3) = \Theta(y_2, y_3) = 2y_2^2 - 4y_3^2$

$\varphi(\bar{x}) = y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$

2) $n_+ = 2$

$n_- = 1$

$\operatorname{rang} \varphi = n_- + n_+ = 3$

3) a) Критерий Сильвестра

$$G = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 3 & 5 \\ -6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$G_1 = 4$

$G_2 = 8$

$$G_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 3 & 5 \\ -6 & 5 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} +2\text{II} \\ \\ -3\text{II} \end{matrix} \sim \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} +\text{III} \\ \sim \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-1)(0-16) = 2\cdot(-16) =$$

$$= -32 \Rightarrow$$

Знакопеременная

б) $\left. \begin{matrix} n_+ = 2 \\ n_- = 1 \end{matrix} \right| \Rightarrow$ Знакопеременная

№ 2.13

$$\begin{vmatrix} -6 & 5 & 7 \end{vmatrix} -3\,\text{II} \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-1)(0-16) = 2\cdot(-16) = -32 \Rightarrow$$

Знакопеременная

б) $n_+ = 2$, $n_- = 1$ $\Rightarrow$ Знакопеременная

№ 2-13 G в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Длина в-ов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ = ?
2. $\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2$ = ?
3. $|\bar{x}|, |\bar{y}|$ = ?
4. $\bar{x} \wedge \bar{y}$ = ?

Ортоганализировать;

Проверка

1. $(e_1, e_1) = 2 \Rightarrow |e_1| = \sqrt{2}$

$(e_2, e_2) = 6 \Rightarrow |e_2| = \sqrt{6}$

2. $(e_1, e_2) = |e_1| \cdot |e_2| \cdot \cos\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{-3}{\sqrt{12}} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(-\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\right)$

3. $(x, x) = x^T G x = (3 \ \ -1)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$= (9 \ \ -15)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 42$

$|x| = \sqrt{42}$

$(y, y) = y^T G y = (1 \ \ 2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= (-4 \ \ 9)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 14$

$|y| = \sqrt{14}$

$(x, y) = (3 \ \ -1)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= (9 \ \ -15)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -21$

4. $-21 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{42} \cos\alpha \Rightarrow$

$\alpha = \arccos\left(\frac{-21}{\sqrt{588}}\right)$

Ортогонализация базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$

$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$

$\bar{f}_2 = \bar{e}_2 - \lambda \bar{e}_1$ $\quad (\bar{f}_1, \bar{f}_2) = 0$

$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2 - \lambda \bar{e}_1) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2) \cdot \lambda (\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 0$

$\lambda = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

$\bar{f}_2 = \bar{e}_2 - \sqrt{6}\bar{e}_1$

$$\begin{cases} \bar{f}_1 = \bar{e}_1 = (1, 0) \\ \bar{f}_2 = \bar{e}_2 - \sqrt{6}\bar{e}_1 = (1 \quad -\sqrt{6}) \end{cases}$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} \end{pmatrix}$ Матрица перехода

Проверка

$\tilde{G} = P^T G P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2+3\sqrt{6} & -3-6\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+3\sqrt{6} \\ 2+3\sqrt{6} & 2+3\sqrt{6}+3\sqrt{6}+36 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2+3\sqrt{6} \\ 2+3\sqrt{6} & 38+6\sqrt{6} \end{pmatrix}$$ Верно

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2+3\sqrt{6} & -3-6\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+3\sqrt{6} \\ 2+3\sqrt{6} & 2+3\sqrt{6}+3\sqrt{6}+ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2+3\sqrt{6} \\ 2+3\sqrt{6} & 38+6\sqrt{6} \end{pmatrix}$$ Верно

№2.14.

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$S = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \bar{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.) М-ца G является матрицей Грама т.к. она симметрична и положительно определена.

$G_1 = 2 > 0$

$G_2 = 3 > 0$

$G_3 = 2(2-1)-(-1)(-1) = 1 > 0$

2) $|\bar{e}_1| = \sqrt{2}$

$|\bar{e}_2| = \sqrt{2}$

$|\bar{e}_3| = 1$

1.

$$|\bar{e}_1||\bar{e}_2|\cos(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$$

$$\cos(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \frac{-1}{2} \Rightarrow \alpha = \pi - \arccos \tfrac{1}{2} = \pi - \tfrac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$$

2. $|\bar{e}_1||\bar{e}_3| \cos(e_1, e_3) = (\bar{e}_1, \bar{e}_3)$

$$\cos(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = \frac{0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \bar{e}_1 \perp \bar{e}_1 \Rightarrow \alpha = \underline{\underline{\tfrac{\pi}{2}}}$$

3. $|\bar{e}_2||\bar{e}_3| \cos(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = (\bar{e}_2, \bar{e}_3)$

$$\cos(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = \pi - \tfrac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}$$

3)

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$(\bar{x}, \bar{x}) = (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$(\bar{y},\bar{y}) = (2\ -1\ 2)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (5\ \ -2\ \ 3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 18$$

$$\cos(\bar{x}\,\hat{}\,\bar{y}) = \frac{(\bar{x},\bar{y})}{|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|} = \frac{2}{18\cdot 3} = \frac{2}{54} = \frac{1}{27}$$

$$\bar{x}\,\hat{}\,\bar{y} = \arccos\left(\frac{1}{27}\right)$$

4)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_{\{s\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$